виразити через кінцеві різниці.

$$[y^2] = ny^2 + [(n-k)\Delta y_k^2] + 2y_1[(n-k)\Delta y_k] + 2[\Delta y_i[\Delta y_j(n-j)]], \qquad (1.49)$$

де k змінюється від1 до n-1 , i – від 1 до n-2,а значення j змінюється від +1 до n-1.

Шукане рівняння буде

$$\varphi(x) = bx + a. \qquad (1.50)$$

Розглянемо ще випадок **визначення поправок** до коефіцієнтів a_1, b_1.

Для зрівноважу вальних обчислень по цьому способу скористаємося формулами (1.41), замінивши в них a, b, y відповідно на $\delta a, \delta b, \delta y$

$$\delta b = 12\frac{[(k-1)\delta y_k] - \frac{n-1}{2}[\delta y]}{\chi n(n-1)(n+1)}, \qquad (1.51)$$

$$\delta a = \frac{[\delta y]}{n} - \delta b\frac{[x]}{n}.$$

Коефіцієнти a, b розраховуються за формулами

$$b = b_1 + \delta b, \quad a = a_1 + \delta a. \qquad (1.52)$$

Контрольна формула має вигляд

$$[y^2] - b\{y_1[\delta y] + \chi\frac{n(n-1)}{2}(b_1 x_1 + a_1) + b_1\chi^2\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \chi[(k-1)\delta y_k]\} - a[y] = [\varepsilon\varepsilon]. \qquad (1.53)$$

Шукане рівняння буде

$$\varphi(x) = (b_1 + \delta b)x + (a_1 + \delta a). \qquad (1.54)$$

У педагогіці і психології великим поширенням користується формула

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

МІЖНАРОДНИЙ ЕКОНОМІКО – ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ім. акад. С. ДЕМ'ЯНЧУКА

Р.М.Літнарович

ЗАСТОСУВАННЯ СПОСОБУ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ ДО ОБРОБКИ МАТЕРІАЛІВ ПСИХОЛОГІЧНИХ І ПЕДАГОГІЧНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

ЧАСТИНА 2

КУРС ЛЕКЦІЙ

Рівне,2007

УДК 519.27
Літнарович Р.М. Застосування способу найменших квадратів до обробки матеріалів психологічних і педагогічних експериментів.Частина 2. Курс лекцій. МЕГУ, Рівне,2007,- 112 с.

Рецензенти: В.О.Боровий, доктор технічних наук, професор
В.Г.Бурачек, доктор технічних наук, професор
Є.С.Парняков, доктор технічних наук,професор

Відповідальний за випуск: Й.В.Джунь, доктор фізико-математичних наук, професор

Досліджуються результати психолого-педагогічного експерименту прямолінійною залежністю, квадратичним поліномом, гіперболічною, степеневою, ірраціональною і показниковою функціями.

Кожна лекція супроводжується виконанням відповідної практичної роботи.

Індивідуальні завдання студенти беруть із результатів побудови математичної моделі кубічним поліномом.

Для студентів і аспірантів Інституту педагогіки МЕГУ.

The results of psychology- pedagogical experiment are probed by rectilineal dependence, quadratic polynomial, hyperbolical, degree, irrational and by indexing functions.

Every lecture is accompanied implementation of the proper practical work.

Students take individual tasks from the results of construction of mathematical model by a cube polynomial.

For students and graduate students of Institute of pedagogic IEGU.

$$[xy] = nx_1y_1 + x_1\{(n-1)\Delta y_1 + \ldots + n\Delta y_{n-1}\} + y_1\chi\frac{n(n-1)}{2} + \chi\{\frac{n(n-1)}{2}\Delta y_1 + \frac{(n+1)(n-2)}{2}\Delta y_2 + \ldots + (n-1)\Delta y_{n-1}\},$$

або в загальному випадку

$$[xy] = nx_1y_1 + x_1[(n-k)\Delta y_k] + y_1\chi\frac{n(n-1)}{2} + \chi\frac{[(n+k-1)(n-k)\Delta y_k]}{2}. \quad (1.45)$$

Підставляючи у (1.11) значення сум відповідно із (1.40), (1.44) і (1.45) , будемо мати значення шуканих коефіцієнтів , виражених через кінцеві різниці

$$b = 6\frac{[k(n-k)\Delta y_k]}{\chi n(n-1)(n+1)},$$
$$a = y + \frac{[(n-k)\Delta y_k]}{n} - \frac{3[k(n-k)\Delta y_k]\{\chi(n-1)+2y_1]}{\chi n(n-1)(n+1)}. \quad (1.46)$$

Для обчислення a можна, також, використати формулу

$$a = \frac{[y]}{n} - b\frac{[x]}{n}. \quad (1.47)$$

Для контролю обчислень застосовується формула

$$[y^2] - b(nx_1y_1) + x_1[(n-k)\Delta y_k] + y_1\chi\frac{n(n-1)}{2} + \chi\frac{[(n+k-1)(n-k)\Delta y_k]}{2}) - a[y] = [\varepsilon\varepsilon]. \quad (1.48)$$

В тому випадку, коли значення y_i достатньо великі, суму [у²] можна для полегшення обчислювальної роботи

$$[x] = nx_1 + \chi\frac{n(n-1)}{2},$$

$$[x^2] = nx_1^2 + 2x_1\chi\frac{n(n-1)}{2} + \chi^2\frac{n(n-1\}(2n-1)}{6}, \quad (1.40)$$

$$[xy] = x_1[y] + \chi[(k-1)y_k],$$

де n- число пар визначень x і y ,χ- значення інтервалу , через який дається аргумент.

Підстановка значень цих сум у (1.11) дає

$$b = 12\frac{[(k-1)y_k] - \frac{n-1}{2}[y]}{\chi n(n-1)(n+1)},$$

$$a = 12\frac{\frac{n-1}{2}[y](x_1 + \chi\frac{2n-1}{3}) - [(k-1)y_k](x_1 + \chi\frac{n-1}{2})}{\chi nn(n-1)(n+1)}, \quad (1.41)$$

або

$$a = \frac{[y]}{n} - b\frac{[x]}{n}.$$

Контрольна формула має вигляд

$$[y^2] - b(x_1[y] + \chi[(k-1)y_k]) - a[y] = [\varepsilon\varepsilon]. \quad (1.42)$$

Формули (1.41) можна виразити за допомогою **кінцевих різниць**. Для цього представимо визначені значення функції y_i через кінцеві різниці

$$y_i = y_1 + \Delta y_1 + \Delta y_2 + ... + \Delta y_{i-1}. \quad (1.43)$$

Виконавши построчне додавання рівностей (1.43), отримаємо

$$[y] = ny_1 + (n-1)\Delta y_1 + (n-2)\Delta y_2 + ... + \Delta y_{n-1},$$

або в загальному випадку

$$[y] = ny_1 + [(n-k)\Delta y_k], \quad (1.44)$$

де значення k змінюється від 1 до n-1.

Аналогічним чином визначається і сума

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Концепція підготовки педагогів високої кваліфікації потребує вміння проводити педагогічні і психологічні експерименти з метою дослідження і забезпечення гарантованого рівня успішності учнів.

Експериментальні роботи супроводжуються математичною обробкою матеріалів і оцінкою точності результатів.

В даному курсі лекцій досліджуються результати психолого-педагогічного експерименту прямолінійною залежністю, квадратичним поліномом, гіперболічною, степеневою і показниковою функціями.

Кожна лекція супроводжується виконанням відповідної практичної роботи.

Індивідуальні завдання студенти беруть із результатів побудови математичної моделі кубічним поліномом першого семестру.

Дослідження проводиться методом побудови спотвореної моделі і знаходження апроксимуючих коефіцієнтів методом найменших квадратів.

На основі виконання домашніх робіт по даному курсу оформляються звіти у вигляді трьох модулів і захищаються в індивідуальному порядку.

Проводиться порівняльний аналіз точності при апроксимації різними функціями однієї і тієї ж спотвореної моделі.

які необхідно визначити за способом найменших квадратів.

Діючи аналогічно приведеному вище, отримаємо два нормальні рівняння

$$\begin{aligned} \delta b[x^2] + \delta a[x] - [x\delta y] &= 0, \\ \delta b[x] + n\delta a - [\delta y] &= 0, \end{aligned} \qquad (1.34)$$

рішення яких дає

$$\begin{aligned} \delta b &= \frac{n[x\delta y] - [x][y]}{n[x^2] - [x][x]}, \\ \delta a &= \frac{[x^2][\delta y] - [x\delta y][x]}{n[x^2] - [x][x]}. \end{aligned} \qquad (1.35)$$

Поправку δa можна обчислити також за формулою

$$\delta a = \frac{[\delta y]}{n} - \delta b\frac{[x]}{n}. \qquad (1.36)$$

Коефіцієнти a і b знаходяться за формулами

$$\begin{aligned} b &= b_1 + \delta b, \\ a &= a_1 + \delta a. \end{aligned} \qquad (1.37)$$

Правильність обчислення a і b контролюється формулою

$$[(\delta b)^2 - \delta b[x\delta y] - \delta a[\delta y] = [\varepsilon\varepsilon]. \qquad (1.39)$$

1.8. Обробка матеріалів при значеннях аргумента у рівних інтервалах

Розглянемо випадок, коли значення аргумента даються через рівні інтервали. При цьому вирази для сум , які входять у склад формул для визначення a і b , будуть необхідно вводити в обчислення величини $[y'],[x']$.

Контрольна формула буде мати вигляд

$$[y^2]-([y'x']+\frac{[y][x]}{n})b-[y]a=[\varepsilon\varepsilon]. \qquad (1.28)$$

Другий метод, який веде до спрощення обчислень , заключається в тому , що розраховують за способом найменших квадратів поправки до наближених значень коефіцієнтів a_1 i b_1.

Наближене значення коефіцієнта обчислюють по двом експериментальним точкам , далеко розташованим одна від другої

$$b_1=\frac{y_i-y_p}{x_i-x_p}. \qquad (1.29)$$

Наближене значення вільного члена визначають за формулою

$$a_1=\frac{[y]}{n}-b_1\frac{[x]}{n}. \qquad (1.30)$$

Наближене рівняння буде

$$y'=xb_1+a_1. \qquad (1.31)$$

Віднімаючи (1.31) із (1.15) , отримаємо

$$y-y'=x(b-b_1)+a-a_1$$

або

$$\delta y=x\delta b+a. \qquad (1.32)$$

Підстановка визначених значень y_i, x_i у (1.32) приводить до системи n рівнянь

$$\begin{aligned} \delta y_1 &= x_1\delta b+a., \\ \delta y_2 &= x_2\delta b+a, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \delta y_n &= x_n\delta b+a. \end{aligned} \qquad (1.33)$$

При цьому невідомими являються поправки $\delta a;\delta b$,

Лекція 1. Дослідження результатів психолого-педагогічного експерименту прямолінійною залежністю

1.1. Представлення операційних змінних-рівня ситуативної тривожності і характеристик пам'яті

В книзі Максименко Д.С.,Носенко Є.Л. «Експериментальна психологія», К.:МАУП,2004,-124с. приведена таблиця «Залежності пам'яті від ситуативної тривожності».

Таблиця 1.1. Залежність пам'яті від ситуативної тривожності (Сирі дані)

Досліджуваний	Показник рівня тривожності Хі	Кількість правильних відповідей Уі
1	2,8	8
2	1.9	13
3	2.9	5
4	2.0	16
5	3.0	11
6	3.1	6
7	2.8	9
8	1.6	18
9	3.2	5
10	3.3	2
Всього n = 10	$\sum$ 26.6	$\sum$ 93.0

Задача дослідника-встановити залежність між Х і У і описати формулою, якщо така можливість існує, яка б оптимально апроксимувала (наближувала) лінію графіка по результатах експериментальних досліджень, зробити оцінку точності.

Апроксимації тестових досліджень можна виконувати різними методами., наприклад, за допомогою сплайн-функцій, поліномами будь-якого порядку, логарифмічними і експоненціальними кривими і т.і.

Розроблена комп’ютерна програма, яка дає можливість апроксимувати будь-які експериментальні дані поліномами будь-якого порядку. Підбираючи чим більшу степінь поліному, згладжуючи крива буде кращим чином проходити по всім експериментальним точкам, але загальна тенденція буде спотворена. Тому слід буде вибирати якнайпростіші лінії графіка і якнайменшу степінь поліному для вияву загальної тенденції результати - вної і факторної ознак.

У психології широко використовують графічне зображення у формі точок у просторі. Так подають результати багатовимірного шкалування, факторного аналізу, латентно-структурного аналізу.

1.2. Побудова варіаційного ряду

Для проведення аналізу даних необхідно їх ранжирувати в зростаючому порядку, тобто побудувати варіаційний ряд.

Таблиця 1.2.Варіаційний ряд експериментальних даних

№п/п	Досліджуваний	Показник рівня тривожності Xi	Кількість правильних відповідей Уi
1	8	1.6	1 8
2	2	1.9	13
3	4	2.0	16
4	1	2.8	8
5	7	2.8	9
6	3	2.9	5

$$[x'] = [y'] = 0,$$

$$[y'x'] = [yx] - \frac{[y][x]}{n}, \qquad (1.21)$$

$$[x'^2] = [x^2] - \frac{[x][x]}{n}.$$

Це витікає із (1.19). Звідси

$$b' = \frac{[x'][y']}{[x'^2]} \quad , \qquad (1.22)$$

$$a' = 0\,, \qquad (1.23)$$

$$y' = b'x'\,. \qquad (1.24)$$

Легко доказати що

$$b = b',$$

$$a = \frac{[y]}{n} - b'\frac{[x]}{n}. \qquad (1.25)$$

Для цього (1.21) підставимо у (1.24)

$$y - \frac{[y]}{n} = \frac{n[yx] - [x][y]}{n[x^2] - [x][x]}\left(x - \frac{[x]}{n}\right).$$

Після перегрупування отримаємо

$$y = b'x + \frac{[y]}{n} - b'\frac{[x]}{n}. \qquad (1.26)$$

Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях рівнянь (1.15) і (1.26), бачимо, що

$$b = b',$$

$$a = \frac{[y]}{n} - b'\frac{[x]}{n}. \qquad (1.27)$$

На практиці у зв’язку із заокругленням сум $\frac{[x]}{n}, \frac{[y]}{n}$, суми $[y'],[x']$ не дорівнюють точно нулям, а бувають малими величинами, якими, як правило, можна нехтувати і користуватися формулами (1.22) і (1.25). В рідких випадках

$$[y^2]-b[yx]-a[y]=[\varepsilon\varepsilon]. \qquad (1.18)$$

Рівняння (1.18) являється контрольним і служить для перевірки всіх обчислень процедури зрівноваження, включаючи і складання нормальних рівнянь.

Другим контрольним рівнянням для даного випадку буде друге нормальне рівняння

$$b[x]+na-[y]=[\varepsilon]=0. \qquad (1.19)$$

За допомогою (1.19) контролюється тільки правильність рішення нормальних рівнянь.

Рішення задачі при прямолінійній залежності не являється складним. Але все ж при великому числі визначень n і великих значеннях x і y обчислювальні роботи можуть бути громіздкими.

1.7. Розробка прийомів спрощення і раціоналізації обчислювальних робіт

Одним із ефективних прийомів раціоналізації обробки матеріалів є метод перетворення координат за допомогою паралельного переміщення координатної сітки до суміщення початку координат з точкою $\frac{[x]}{n},\frac{[y]}{n}$.

Зв'язок між новими і старими координатами виражається формулами

$$x_i' = x_i - \frac{[x]}{n}, \qquad y_i' = y_i - \frac{[y]}{n}. \qquad (1.20)$$

При такому перетворенні будемо мати

7	5	3.0	11
8	6	3.1	6
9	9	3.2	5
10	10	3.3	2
Всього n = 10		∑ 26.6	∑ 93.0

Якщо ми поставили перед собою мету встановити функціональну залежність між факторними Хі і функціональними (результативними) Уі ознаками, то по-перше не може одному і тому ж значенню Х=2.8 відповідати два різних значення У , рівних 8 і 9, що видно із табл..1.2, а двом різним значенням Хі (2.9 та 3.2) відповідати одне значення У =5.

По друге, загальна тенденція варіаційного ряду експериментальних даних представлених в табл.. 1.2 показує по мірі зростання ситуативної тривожності Хі спадання результативної ознаки пам'яті Уі.

Але в даній таблиці видно проявлення суб'єктивного фактору, про що говорить послідовність Уі (18, 13, 16, 8). Для відповідного рівня тривожності математичну модель краще задовільнив би ряд (18, 16, 13, 8).

По третє, в загальній тенденції спаду проявляється різкий стрибок в 11 балів рівню тривожності по шкалі Спілбергера, рівний 3.0.

Звичайно, і ці дані можна включати в математичну обробку для встановлення функції, яка б описувала досліджувану проблему. Але в даному випадку буде велике розсіювання результатів від експериментальних даних.

При проведенні добре організованого повторного експерименту нами отримані слідуючі дані.

Таблиця 1.3.Результати повторного експерименту

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Хі	1,6	2	2,1	2,3	2,5	2,8	2,9	3	3.1	3,3
Уі	18	14	13	12	11	9	8	7	6	3

Аналізуючи дані табл..1.3 і табл.. 1.2, замітимо, що в даних таблицях залишились базовими (реперними) ознаками X_1 =1,6 ; $У_1$= 18, а рівню тривожності в 2.8 і 3.1 відповідає результативна ознака в 9 і 6 балів відповідно.

1.3. Побудова точкової діаграми і графіка

Для підбору апроксимуючої функції побудуємо точкову діаграму і графік на основі даних табл.. 1.3.

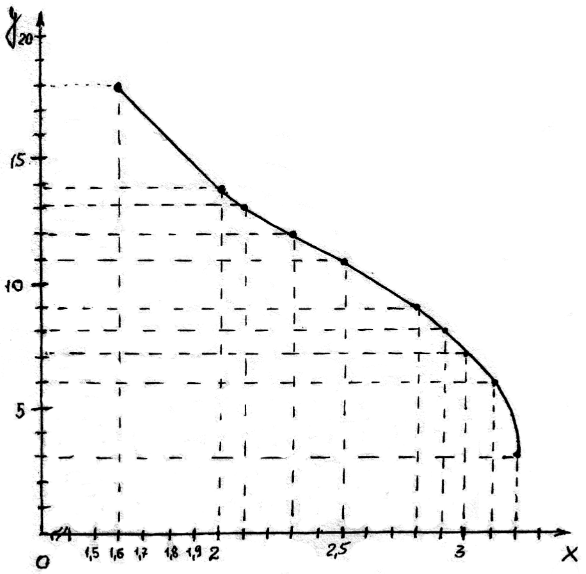

Рис.1.1.Точкова діаграма і графік експериментальних даних

Зручно будувати точкову діаграму і графік на персональному комп'ютері у редакторі Microsoft Offise Excel.

У клітинці A1 набирають незалежну змінну X, а в клітинці B1- результуючу функцію У. Після цього

без обчислень коефіцієнтів a і b побудувати графік шуканої кривої, тобто виконати зрівноваження графічним шляхом. Обчислення координат першої точки $\frac{[x]}{n}, \frac{[y]}{n}$ ніяких труднощів не представляє. Обчислення координат другої точки $\frac{[x^2]}{[x]}, \frac{[xy]}{[x]}$ в деяких випадках може бути затрудненим. Тоді шукану пряму можна провести через першу точку $\frac{[x]}{n}, \frac{[y]}{n}$ таким чином, щоб ця пряма розмістилася як можна ближче до всіх експериментальних точок, нанесених попередньо на графік.

1.6. Контроль зрівноваження

Підставимо в отримане ймовірніше рівняння

$$\varphi(x_i) = b\,x_i + a \tag{1.15}$$

визначені значення аргумента $x_1, x_2, ..., x_n$, будемо мати ймовірніше значення функції $\varphi(x_i)$, відмінні від результатів визначень на невеликі величини

$$\begin{aligned} &bx_1 + a - y_1 = \varepsilon_1, \\ &bx_2 + a - y_2 = \varepsilon_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &bx_n + a - y_n = \varepsilon_n. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Підведемо до квадрату праві і ліві частини рівностей (1.16) і додамо їх

$$\begin{aligned} &b^2[x^2] + na^2 + [y^2] + 2ab[x] - 2b[yx] - 2a[y] = \\ &b(b[x^2] + a[x] - [yx]) + a(b[x] + na - [y]) + [y^2] - \\ &b[yx] - a[y] = [\varepsilon\varepsilon]. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Звідси, на основі (1.1)

$$\varphi(x)= \frac{n[yx]-[x][y]}{n[x^2]-[x][x]}\,x + \frac{[x^2][y]-[[yx][x]}{n[x^2]-[x][x]}. \qquad (1.13)$$

Задача рішена.

1.5. Зрівноваження графічним шляхом

Якщо в (1.13) підставити замість x середнє арифметичне його значення із ряду визначень [x]/n , то після перетворень отримаємо

$$\varphi(\frac{[x]}{n}) = \frac{[y](n[x^2]-[x][x])}{(n[x^2]-[x][x])n} = \frac{[y]}{n}. \qquad (1.14)$$

Таким чином, точка з координатами $\frac{[x]}{n},\frac{[y]}{n}$ завжди лежить на шуканій прямій.

По аналогії , підставивши у (1.13) $\frac{[x^2]}{n}$ замість x,

отримаємо $y = \frac{[xy]}{[x].}$ (1.15)

Значить, точка з координатами $\frac{[x^2]}{[x]},\frac{[xy]}{[x]}$ також завжди лежить на рівнянні прямої.

Таким чином, нам відомі координати двох точок, які завжди лежать на ймовірнішій прямій. Це дає можливість

набирають у стовпчику А всі десять значень Х, а в стовпчику В – всі десять значень У.

1. Виділяють дані, на основі яких буде створена діаграма.

2 Вибирається команда Вставка, Діаграма.

3. Виділяється «Точкова» діаграма.

4. Клікнути лівою половиною миші на кнопку «Готово», щоб створити діаграму.

1.4. Теоретичні основи

Формула прямолінійної залежності має вигляд

$$\mathbf{y} = a + \mathbf{bx}, \qquad (1.1)$$

або, якщо $a = 0$,

$$\mathbf{y} = \mathbf{bx}. \qquad (1.2)$$

Застосуємо спосіб найменших квадратів для апроксимації рівнянням прямолінійної залежності (1.1) за двома рядами результатів експериментальних досліджень x_i, y_i, приведених в табл.. 1.3, де x_i приймаються величинами безпомилковими.

Необхідно так підібрати функцію

$$\varphi(x_i) = b\,x_i + a\ , \qquad (1.3)$$

щоб коефіцієнти a і b були вірогіднішими.

У відповідності з вимогою способу найменших квадратів, для цього необхідно, щоб сума квадратів відхилень отриманих значень y_i від $\varphi(x_i)$,була мінімальною

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - bx_i - a)^2 = \min. \qquad (1.4)$$

Вирази відхилень спостережених значень y_i від $\varphi(x_i)$ в розгорнутому вигляді будуть

$$\begin{aligned} &y_1 - bx_1 - a = \varepsilon_1, \\ &y_2 - bx_2 - a = \varepsilon_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &y_n - bx_n - a = \varepsilon_n. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Отримали систему n рівнянь , які називаються початковими. Підведемо до квадрату ліві і праві частини цих рівнянь, отримаємо

$$\begin{aligned} &(y_1 - bx_1 - a)^2 = \varepsilon_1{}^2, \\ &(y_2 - bx_2 - a)^2 = \varepsilon_2{}^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &(y_n - bx_n - a)^2 = \varepsilon_n. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Додавши ці рівності, отримаємо

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - bx_i - a)^2 = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^2. \tag{1.7}$$

Щоб знайти його мінімум, необхідно взяти частинні похідні цього виразу по a і b і прирівняти їх нулю. Отримаємо два нормальних рівняння з двома невідомими

$$\frac{\partial}{\partial b} \sum_{i=1}^{n} (y_i - bx_i - a)^2 = 2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - bx_i - a)x_i = 0, \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \sum_{i=1}^{n} (y_i - bx_i - a)^2 = 2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - bx_i - b) = 0.$$

Після скорочення на 2 і зміни знака будемо мати

$$b \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = 0, \tag{1.9}$$

$$b \sum_{i=1}^{n} x_i + na - \sum_{i=1}^{n} y_i = 0,$$

або, застосовуючи Гаусове позначення сум,

$$\begin{aligned} &b[x^2] + a[x] - [yx] = 0, \\ &b[x] + na - [y] = 0. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Рішення цих нормальних рівнянь дає вірогідніше значення коефіцієнтів a і b

$$\begin{aligned} b &= \frac{n[yx] - [x][y]}{n[x^2] - [x][x]}, \\ a &= \frac{[x^2][y] - [[yx][x]}{n[x^2] - [x][x]}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Коефіцієнт a може бути визначений із формули (1.10)

$$a = \frac{[y]}{n} - \frac{[x]}{n}. \tag{1.12}$$

Після підстановки (1.11) в (1.1) отримаємо вірогідніше значення шуканої функції, яку завжди будемо позначати через $\varphi(x)$

середня квадратична похибка функції, зрівноваженої за способом найменших квадратів, при прямолінійній залежності досягає найменшого значення в точці з абсцисою $\frac{[y]}{n}$, тобто в середній точці інтервалу експериментальних визначень.

В обидві сторони від середини інтервалу похибка функції зростає.

Формула (3.12) дає можливість обмежити використання зрівноваженої функції таким інтервалом, в межах якого її середня квадратична похибка не перевищує заданого наперед значення.

Зона розсіювання зрівноваженої функції обмежується кривими

$$\varphi(y) = bx + a \pm \sqrt{m_b{}^2\left(x - \frac{[x]}{n}\right)^2 + m^2_{\frac{[y]}{n}}} \,. \qquad (3.13)$$

які проходять через точки

$$\left(x = \frac{[x]}{n}; y = \frac{y_n}{n} \pm \sqrt{\frac{[EE]}{n(n-2)}}\right). \qquad (3.14)$$

Дотичні до цих кривих у вказаних точках проходять під кутом до осі абсцис (рис.3.1).

$$\mathbf{y = bx,} \qquad (1.55)$$

яка є частковим випадком повної формули (1.1) коли коефіцієнт a дорівнює нулю. За допомогою цієї формули виражається залежність між рядом величин , досліджуваних у педагогіці і психології.

Пряма (1.55) проходить через початок координатної системи. Для визначення коефіцієнта b маємо одне нормальне рівняння

$$[yx] - b[x^2] = 0. \qquad (1.56)$$

Звідси

$$b = \frac{[yx]}{[x^2]}. \qquad (1.57)$$

Зрівноважене рівняння має вигляд

$$\varphi(x) = \frac{[yx]}{[x^2]}x. \qquad (1.58)$$

Правильність обчислень контролюється за допомогою формули

$$[y^2] - b[yx] = [\varepsilon\varepsilon]. \qquad (1.59)$$

Замітимо, що пряма (1.58) проходить через точки (0,0), $((\frac{[x^2]}{[x]};\frac{[yx]}{[x]}),([x^2];[yx])$ і не може бути нанесена на координатну сітку без обчислення коефіцієнта b , хоча обчислення його і є достатньо простим.

При рівновідстоячих значеннях аргумента коефіцієнт b визначається формулою

$$b = \frac{x_1[y] + \chi[(k-1)y_k]}{nx_1 + 2x_1\chi\frac{n(n-1)}{2} + \chi^2\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}}. \qquad (1.60)$$

Контрольна формула має вигляд

$$[y^2] - (x_1[y] + \chi\{(k-1)y_k])b = [\varepsilon\varepsilon]. \qquad (1.61)$$

Через кінцеві різниці формула (1.57) виражається слідуючим чином

$$a=\frac{(x_1+\chi\frac{n-1}{2})([(n-k)\Delta y_k]+ny_1)+\chi\frac{[k(n-k)\Delta y_k]}{2}}{nx_1^2+x_1\chi n(n-1)+\chi^2\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}}.\quad(1.62)$$

Обчислення контролюються формулою

$$[y^2]-\{(x_1+\chi\frac{n-1}{2})([n-k)\Delta y_k]+ny_1)+ \chi\frac{[k(n-k)\Delta y_k}{2}\}b=[\varepsilon\varepsilon]. \quad(1.63)$$

Спрощений метод обчислень , який знайшов собі значне використання , полягає у перетворенні рівняння (1.49) до виду

$$q=b \quad(1.64)$$

шляхом ділення правої і лівої частин його на x, де

$$q=\frac{y}{x}.$$

Підставляючи у рівняння (1.64) результати визначень , отримаємо **систему початкових рівнянь**

$$b-\frac{y_i}{x_i}=\eta_i. \quad(1.65)$$

Із цієї системи рівнянь утворюємо, з врахуванням вимог способу найменших квадратів, одне **нормальне рівняння**

$$nb=[\frac{y}{x}]=[q], \quad(1.66)$$

із якого і визначається коефіцієнт b

$$b=\frac{[\frac{y}{x}]}{n}=\frac{[q]}{n}. \quad(1.67)$$

Проміжний контроль виконується за допомогою рівності

Перетворимо підкореневий вираз, додавши до чисельника вираз

$$m_\varphi=\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-2}\left\{n\left(\frac{x^2-2\frac{[x]}{n}x+\frac{[x][x]}{n^2}}{n[x^2]-[x][x]}\right)+\frac{1}{n}\right\}},$$

або

$$m_\varphi=\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-2}\left\{\frac{n\left(x-\frac{[x]}{n}\right)^2}{n[x^2]-[x][x]}+\frac{1}{n}\right\}}\ . \quad(3.10)$$

Приймаючи до уваги, що вага арифметичної середини дорівнює n, а середня квадратична похибка арифметичної середини $\frac{[y]}{n}$ буде

$$m_{\frac{[y]}{n}}=\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-2}\cdot\frac{1}{n}}. \quad(3.11)$$

Це дасть змогу перетворити (3.10) з врахуванням (2.9) слідуючим чином

$$my=\sqrt{m_b{}^2\left(x-\frac{[x]}{n}\right)^2+m_{\frac{[y]}{n}}{}^2}\ . \quad(3.12)$$

За формулою (3.12) підраховується середня квадратична похибка зрівноваженої функції для всіх випадків повного рівняння прямої. Із формули видно, що

$$\frac{\partial b}{\partial y}\cdot\frac{\partial a}{\partial y}=\frac{nxi\left[x^2\right]-nx^2\left[x\right]-\left[x\right]\left[x^2\right]+xi\left[x\right]\left[x\right]}{(n\left[x^2\right]-\left[x\right]\left[x\right])^2}.$$

Після додавання і скорочення отримаємо

$$\left[\frac{\partial b}{\partial y}\cdot\frac{\partial a}{\partial y}=-\frac{[y]}{n\left[x^2\right]-[x][x]}\right]. \quad (3.5)$$

Таким чином, кінцевий вираз середньої квадратичної похибки лінійної зрівноваженої функції буде

$$m_\varphi=\sqrt{{m_b}^2x^2+{m_a}^2-2\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-2}\cdot\frac{[x]}{\left[x^2\right]-[x][x]}x}\cdot\ . \quad (3.6)$$

При підстановці $x`=x-\frac{[x]}{n}$ формула перетворюється

$$m_\varphi=\sqrt{m^2x^2+{m_a}^2-2\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-2}\cdot\frac{[x]}{\left[x`^2\right]}x}\ . \quad (3.7)$$

А при рівновідстоячих значеннях аргумента

$$m_\varphi=\sqrt{{m_b}^2x^2+{m_a}^2-24\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-2}\cdot\frac{x_1+x\frac{n-1}{2}}{xn(n-1)(n+1)}}\ . \quad (3.8)$$

Представимо формулу (3.6) у розгорнутому вигляді, підставивши в неї m_a і m_b із (2.9)

$$m_\varphi=\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-2}\cdot\frac{n\left[x^2\right]-2[x][x]+\left[x^2\right]}{n[x2]-[x][x]}}\ . \quad (3.9)$$

$$[q^2]-b[q]=[\eta\eta]. \quad (1.68)$$

Для **заключного контролю** служить формула

$$b(b[y^2]-2[qx^2])+[x^2q^2]=[\eta\eta xx]. \quad (1.69)$$

Необхідно слідкувати за тим, щоб використання цього прийому не вело до пониження точності визначення кінцевих результатів.

Практична робота 1

Практичну реалізацію теоретичних викладок необхідно виконувати за допомогою обчислювальної таблиці.

Обчислювальна таблиця- це алгоритм розрахунку за допомогою будь-яких обчислювальних засобів від простого мікрокалькулятора, програмованого мікрокалькулятора або персонального комп'ютера.

Обчислювальну таблицю доцільно привести у вигляді плаката при публічному захисті результатів досліджень. Крім того, вона є контрольним прикладом при складанні програми на ЕОМ.

Таблиця 1.4. Обчислювальна таблиця

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
1	1.6	18	28.8	2.56
2	2	14	28	4
3	2.1	13	27.3	4.41
4	2.3	12	27.6	5.26
5	2.5	11	27.5	6.25
6	2.8	9	25.2	7.84
7	2.9	8	23.2	8.41
8	3	7	21	9
9	3.1	6	18.6	9.61
10	3.3	3	9.9	10.89
n=10	∑25.6	∑101	∑237.1	∑68.26

i	y_i^2	$y_i^{'}$=30.27-7.88x	$\varepsilon = y' - y$	$\varepsilon\varepsilon$
1	324	17.66	-0.34	0.1156
2	196	14.51	+0.51	0.2601
3	169	13.72	+0.72	0.5184
4	144	12.15	+0.15	0.0225
5	121	10.57	-0.43	0.1849
6	81	8.21	-0.79	0.6241
7	64	7.42	-0.58	0.3364
8	49	6.63	-0.37	0.1369
9	36	5.84	-0.16	0.0256
10	9	4.27	+1.27	1.6129
n=10	∑1193	∑100.98	∑-0.02	∑3.8374

Спочатку розраховується **коефіцієнт кореляції r**,який є показником тісноти зв'язку між **факторними x** і **результуючими у** ознаками за формулою

$$r^2 = \frac{([xy] - \frac{1}{n}[x][y])^2}{([x^2] - \frac{1}{n}[x]^2)([y^2] - \frac{1}{n}[y]^2}. \qquad (1.70)$$

За законом Чеддока , якщо :

1) r = 0.1-0.3 , то зв'язок між ознаками (x,y) слабкий;
2) r = 0.5-0.7 , то зв'язок помірний;
3) r = 0.7-0.9 , зв'язок високий;
4) r = 0.9-0.99, зв'язок надто високий.

При r < 0, як буде в нашому випадку , -при зростанні x зменшується у.

Позначимо

$$\varphi(x) = bx + a\ . \qquad (3.1)$$

Середня квадратична похибка цього виразу у відповідності з (2.1.)

$$m_\varphi = \sqrt{m_y{}^2\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_n}\right)^2\right\}} =$$

$$= \sqrt{m_y{}^2\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right]^2}\ . \qquad (3,2)$$

Але

$$\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right] = \left[\left(\frac{\partial b}{\partial y}\right)^2\right]y^2 + 2\left[\frac{\partial b}{\partial y}\cdot\frac{\partial a}{\partial y}\right]y + \left[\left(\frac{\partial a}{\partial y}\right)^2\right]\ . \qquad (3.3)$$

Підстановка (3.3) в (3.2) дає

$$m_\varphi = \sqrt{m_b{}^2x^2 + m_a{}^2 + 2\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-2}\left[\frac{\partial b}{\partial y}\cdot\frac{\partial a}{\partial y}\right]x}\ . \qquad (3.4)$$

Для того, щоб розкрити вираз $\left[\frac{\partial b}{\partial y}\cdot\frac{\partial a}{\partial y}\right]$, візьмемо частинні похідні $\frac{\partial b}{\partial y} i \frac{\partial a}{\partial y}$ із (1.11) і перемножимо їх

$$\frac{\partial b}{\partial y}\cdot\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{nxi - [x]}{n[x^2] - [x][x]}\cdot\frac{[x^2] - [x]xi}{n[x^2] - [x][x]}\ ,$$

або

Лекція 3. Середня квадратична похибка зрівноваженої функції прямолінійної залежності
3.1. Постановка задачі

В попередній лекції були виведені формули для підрахунку середніх квадратичних похибок коефіцієнтів, які входять у формули залежності між досліджуваними факторами у психології і педагогіці. Ці формули дають можливість виконати оцінку точності окремих елементів залежності.

Але дуже важливо знати похибку визначення кінцевого результату дослідження, тобто похибку експериментальної функції.

Знання похибок зрівноваженої функції, як в межах інтервалу спостережень, так і зовні його, дає можливість обмежити використання функції в межах тих значень аргументу, при яких помилковість її не перевищує заданої величини.

Крім того, це дозволяє виконати порівняльний аналіз отриманих результатів, виходячи із застосування різних формул, і вибрати найбільш підходящу формулу.

3.2. Теоретичні основи

Зрівноважене значення функції дається формулою

$$[xy]-\frac{1}{n}[x][y] = A, \qquad (1.71)$$

$$[x^2]-\frac{1}{n}[x]^2 = B. \qquad (1.72)$$

$$[y^2]-\frac{1}{n}[y] = C\,.$$

Тоді, формула (1.70) буде

$$r^2 = \frac{A^2}{B([y^2]-\frac{1}{n}[y]^2)}. \qquad (1.73)$$

І в нашому випадку

$$r^2 = \frac{(237.1-0.1*25.6*101)^2}{(68.26-0.1*25.6^2)(1193-0.1*101^2)} = \frac{(-21.46)^2}{2.724*172.9}$$

$= 0.97$

При цьому A=-21.46; B= 2.724.

Тоді, коефіцієнт кореляції r буде

$$r=\sqrt{r^2}=\sqrt{0.978}=0/9889,$$

що говорить про надто високий зв'язок між факторними і результуючими ознаками і дає нам право встановити цей зв'язок у вигляді **емпіричної формули** прямолінійного зв'язку.

Розрахуємо коефіцієнт b за формулою

$$b=\frac{[xy]-\frac{1}{n}[x][y]}{[x^2]-\frac{1}{n}[x]^2}, \qquad (1.74)$$

або, з врахуванням наших позначень

$$b=\frac{A}{B}. \qquad (1.75)$$

В нашому випадку

$$b = \frac{-21/46}{2/724} = -7/878.$$

Коефіцієнт a

$$a = \frac{1}{n}([y] - b[x]), \qquad (1.76)$$

І в нашому випадку

$$a = 0.1(101 - (-7/878) * 25.6) = 30.267.$$

Таким чином, на основі проведених досліджень нами встановлена **емпірична формула** впливу ситуативної тривожності х на характеристики пам'яті у

y' =30.27-7.88x. (1.77)

Проведемо контроль зрівноваження за формулою (1.18)

$$[y^2] - b[yx] - a[y] = [\varepsilon\varepsilon].$$

В нашому випадку

1193-(-7.878)*237.1-30.267*101=3.9068.

У таблиці 1.4 $[\varepsilon\varepsilon]$=3/8374. Різницю (3.9068-3.8374)= =0.0694 можемо віднести на рахунок похибок заокруглень.

Контроль за формулою (1.19)

-7.878*25.6+10*30267-101=-0.0068.

Проведемо оцінку точності отриманих результатів.

Середня квадратична похибка одиниці ваги m

$$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-k}}, \qquad (1.78)$$

Де n-число пар спостережень; k-число початкових рівнянь.

У нашому випадку

$$m = \sqrt{\frac{3{,}8374}{10-2}} = 0{,}692.$$

Таким чином, в результаті проведеної обробки матеріалів психологічного експерименту нами:

1. Отримана емпірична формула впливу ситуативної тривожності на характеристики пам'яті

y' =30.27-7.88x.

лінійною функцією на програмованому мікрокалькуляторі CITIZEN SRP -350 SCIENTIFIC CALCULATOR

1. Натиснути клавішу mode і ввійти в меню програм.
2. Підводячи курсор, вибрати програму 1stat.
3. Натиском клавіші Enter ввійти в підменю програм.
4. Вибрати підпрограму 2reg і натиснути клавішу Enter.
5. Підвести курсор під програму 0lin і натиснути клавішу Enter.
6. Натиснути клавішу Data.
7. Натиснути клавішу Data-input , підводячи під неї курсор.
8. Натиснути клавішу Enter.
9. Попарно набрати параметри x,y, натискуючи курсор (сторінку вниз) для набору нового параметра.
10. Набравши всі параметри, натискують клавішу 2nd і після клавішу statvar.
11. Програма виконується автоматично і через декілька секунд будуть готові результати.
12. Підводячи курсор поперемінно під параметри r, a ,b, зчитуємо з дисплею необхідні параметри.
13. Підводячи курсор під знак У, натискують Enter і набирають факторні дані X і зчитують розрахункові параметри для контролю У'.
14. Примітка. На даному занятті ми працюємо з програмою 0LIN, яка будує нам тренд лінійної апроксимації за способом найменших квадратів.

В результаті програмного розрахунку ми отримали:

a =30.26798825, b=-7,878120411, r = -0.988846019,

тобто

У'=30,26798825-7,878120411X.

Алгоритм побудови математичної моделі на Мікро-ЕОМ

Маючи результати контрольних розрахунків, в подальшому досліднику потрібно створити програму на мікро-ЕОМ , або використати існуючі програми для того, щоб обробляти великі вибірки із генеральних сукупностей для збільшення інформативності і об'єктивності власних досліджень з однієї сторони, і торування шляху для інших дослідників , які будуть прямувати в цьому напрямку.

Комп'ютерна програма Excel забезпечує ефективну підтримку для проведення регресійного аналізу – 15 функцій робочих листів, створених безпосередньо для цієї мети, а також інші можливості, включаючи інструмент аналізу «Регресія», команду меню «Правка», "Заполнить", "Регрессия", побудови лінії тренду на графіках, за допомогою яких зручніше використовувати конкретні регресійні обчислення.

Крім цього, необхідно відмітити, що програмовані мікрокалькулятори для наукових розрахунків, такі як "CITIZEN SRP -350", "CITIZEN SRP -325 G", "ASSISTANT AC-3609" і інші мають "вшиті" алгоритми програм для подібних розрахунків.

Негативною стороною подібних програм є відсутність формул, за якими вони були створені. Вони, фактично, є "чорним ящиком" для користувача.

Серйозному досліднику необхідно створити свою програму для проведення власних досліджень.

Інструкція побудови математичної моделі

2. Отримана точка перетину лінії регресії a =30.27 з віссю у.

3. Розрахунковий нахил регресії

b=30.27/(-7.88)=3.84.

4. Одержаний коефіцієнт кореляції r =0.99 говорить про надто високий зв'язок між факторною і результативною ознакою.

5. Точність визначення характеристик пам'яті за отриманою формулою складає 0.69 бала за шкалою Спілбергера.

Лекція 2. Оцінка точності результатів при побудові математичної моделі прямолінійної залежності

Коефіцієнти a_i ,визначені за способом найменших квадратів, являються функціями визначених в результаті психолого-педагогічного експерименту величин $y_1, y_2, ..., y_n$.

Тому середня квадратична похибка будь-якого коефіці-єнта a_i визначається за формулою

$$m_y^2 = (\frac{\partial f}{\partial x_1})^2 m_{x_1}^2 + (\frac{\partial f}{\partial x_2})^2 m_{x_2}^2 + ... + (\frac{\partial f}{\partial x_n})^2 m_{x_n}^2, \qquad (2.1)$$

тобто, квадрат середньої квадратичної похибки декількох незалежних змінних дорівнює сумі добутків квадратів частинних похідних по кожному аргументу на квадрати середніх квадратичних похибок відповідних аргументів.

Це правило справедливе для таких умов, коли частинні похідні аргументів можна вважати практично постійними в межах зміни аргументів від x_i до $x_i + \Delta x_i$.

Формула (2.1) являється загальною і дає можливість визначити середню квадратичну похибку функції будь-якого виду.

І в нашому випадку

$$m_{a_i}^2 = [(\frac{\partial a}{\partial y_k})^2 m_{y_k}^2], \qquad (2.2)$$

де m_{yk} - середня квадратична похибка результатів експерименту , яка визначається за формулою

$$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-k}}, \qquad (2.3)$$

враховуючи, що $m_{y_1} = m_{y_2} = ... = m_{y_n}$, то значок k в символі m_{y_k} можна опустити і винести символ за знак суми

$$m_{a_i}^2 = [(\frac{\partial a}{\partial y})^2 m_y^2], . \qquad (2.4)$$

При цьому $\frac{\partial a_i}{\partial y_k}$ є частинна похідна виразу коефіцієнта a_i по визначеному значенню функції $y_{k.}$

На основі формули (2.4) , визначимо середні квадратичні похибки коефіцієнтів a_i, b в прямолінійній залежності.

Розгортуючи чисельник кожного виразу

$$\begin{aligned} &[x^\circ x^\circ \cdot 1]a_3 + [xx^\circ \cdot 1]a_2 - [x^\circ y] = 0, \\ &[x^\circ x^\circ \cdot 1]a_3 + [xx \cdot 1]a_2 - [xy] = 0 \end{aligned} \quad , \qquad (2.5)$$

який ми отримали у попередньому семестрі, будемо мати

$$b = y_1 \frac{nx_1 - [x]}{n[x^2] - [x][x]} + y_2 \frac{nx_2 - [x]}{n[x^2] - [x][x]} + ... + y_n \frac{nx_n - [x]}{n[x^2] - [x][x]},$$

$$a = y_1 \frac{[x^2] - x_1[x]}{n[x^2] - [x][x]} + y_2 \frac{[x^2] - x_2[x]}{n[x^2] - [x][x]} + ... + y_n \frac{[x^2] - x_n[x]}{n[x^2] - [x][x]}.$$

$$p_b = \frac{10 * 68{,}26 - 25.6^2}{68.26} = 0.399.$$

При цьому

$$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-k}} = \sqrt{\frac{3.8374}{10-2}} = 0.692,$$

$$m_b = \frac{m}{\sqrt{p_b}} = \frac{0.692}{\sqrt{2.724}} = 0.419,$$

$$m_a = \frac{m}{\sqrt{p_a}} = \frac{0.692}{\sqrt{0.399}} = 1.095.$$

В минулому семестрі при апроксимації даного ряду x і y в схемі Гауса для другого рівняння ми отримали вагу p_b=2,724, що є надійним контролем і наших обчислень і виведених на лекції 2 формул.

Там же, згідно першої схеми Гаусса при побудові істинної моделі ми отримали

$$\frac{p_b}{[xx]} = \frac{p_a}{[x^\circ x^\circ]},$$

звідки

$$p_a = p_b \frac{[x^\circ x^\circ]}{[xx]}.$$

І в нашому випадку

$$p_a = 2.724 \frac{10}{68.26} = 0.399,$$

що і буде надійним контролем.

При цьому необхідно пам'ятати , що вага передостаннього невідомого в схемі Гауса так відноситься до суми коефіцієнтів при цьому невідомому, як вага останнього невідомого відноситься до суми коефіцієнтів при цьому невідомому без останнього складового.

$$m_b = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{\text{n - 2}} \frac{n}{n[x^2]-[x][x]}},$$
$$m_a = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{\text{n - 2}} \frac{[x^2]}{n[x^2]-[x][x]}}. \qquad (2.10)$$

для функції

$$y = a + bx = 30/27 - 7.88x.$$

В загальному вигляді формули середніх квадратичних похибок зрівноважених по способу найменших квадратів коефіцієнтів $a, b.$ розраховуються за формулами

$$m_b = m\sqrt{\frac{1}{p_b}} = \frac{m}{\sqrt{p_b}},$$

$$m_b = m\sqrt{\frac{1}{p_b}} = \frac{m}{\sqrt{p_b}},$$

де m- середня квадратична похибка одиниці ваги, розрахована за формулою (1.78)

$$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-k}},$$

де n- число пар x i y , k-число початкових рівнянь.

Вага p_b коефіцієнта b розраховується за формулою

$$p_b = \frac{n[x^2]-[x][x]}{n},$$

вага p_a коефіцієнта a розраховується за формулою

$$p_a = \frac{n[x^2]-[x][x]}{[x^2]}.$$

І в нашому випадку

$$p_b = \frac{10 * 68/26 - 25.6^2}{10} = 2.724.$$

(2.6)

Частинні похідні цих виразів по y_i будуть

$$\frac{\partial b}{\partial y} = \frac{nx_1 - [x]}{n[x^2]-[x][x]} + \frac{nx_2 - [x]}{n[x^2]-[x][x]} + \ldots + \frac{nx_n - [x]}{n[x^2]-[x][x]},$$
$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{[x^2] - x_1[x]}{n[x^2]-[x][x]} + \frac{[x^2] - x_2[x]}{n[x^2]-[x][x]} + \ldots + \frac{[x^2] - x_n[x]}{n[x^2]-[x][x]}. \qquad (2.7)$$

Після підведення до квадрату, додавання і приведення подібних членів, отримаємо

$$[(\frac{\partial b}{\partial y})^2] = \frac{n^2[x^2] - n[x][x]}{(n[x^2]-[x][x])^2} = \frac{n}{n[x^2]-[x][x]},$$
$$[(\frac{\partial a}{\partial y})^2] = \frac{n[x^2][x^2] - [x^2][x][x]}{(n[x^2]-[x][x])^2} = \frac{[x^2]}{n[x^2]-[x][x]}. \qquad (2.8)$$

Розглядаючи отримані вирази, замітимо, що вони являються коефіцієнтами при вільних членах $[yx],[y]$ нормальних рівнянь (1.10) у виразах (1.11) відповідних невідомих $a, b.$

Вказана закономірність характерна для поліному будь-якої степені . Це дає можливість в процесі обчислення коефіцієнтів отримати суму квадратів частинних похідних кожного шуканого невідомого. Вона дорівнює коефіцієнту у виразі шуканого невідомого a_i при вільному члені $[x^k y]$, взятому із того нормального рівняння, яке отримується шляхом диференціювання початкових рівнянь по вказаному невідомому.

Для визначення середніх квадратичних похибок коефіцієнтів підставимо вирази (2.8) у формули (2.2)

$$m_b^2 = m_y^2 \frac{n}{n[x^2]-[x][x]} = \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-2} \frac{n}{n[x^2]-[x][x]},$$

$$m_a^2 = m_y^2 \frac{[x^2]}{n[x^2]-[x][x]} = \frac{[x^2]}{n[x^2]-[x][x]} \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-2}, \qquad (2.9)$$

або

$$m_b = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{\text{n - 2}} \frac{n}{n[x^2]-[x][x]}},$$
$$m_a = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{\text{n - 2}} \frac{[x^2]}{n[x^2]-[x][x]}}. \qquad (2.10)$$

По цим же формулам визначаються середні квадратичні похибки коефіцієнтів $a, b.$, обчислених за допомогою зрівноваження поправок $\delta a, \delta b$ (формули 1.35 і 1.37).

Якщо обчислення коефіцієнтів було виконано за формулами (1.22),(1.24) і (1.25), то формули їх середніх квадратичних похибок утворюються шляхом заміни в (2.10) суми $[x^2]$ сумою $[x'^2] - \frac{[x][x]}{n}$

$$m_b = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{\text{n - 2}} \frac{1}{[x'^2]}},$$
$$m_a = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{\text{n(n - 2)}} \frac{n[x'^2] - \frac{[x][x]}{n}}{n[x'^2]}}. \qquad (2.11)$$

Формули для випадку рівновідстоячих значень аргументу отримують заміною у (2.10) сум $[x'^2], [x']$ Їх значеннями із (1.40)

$$m_b = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{\text{n - 2}} \frac{12}{\chi^2 n(n-1)(n+1)}},$$
$$m_a = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{\text{n(n - 2)}} (1 + \frac{12(x_1 + \chi\frac{n-1}{2})^2}{\chi^2 (n-1)(n+1)})}. \qquad (2.12)$$

По цим же формулам визначають середні квадратичні похибки коефіцієнтів $a, b.$ для випадку користування кінцевими різницями або поправками до наближених значень шуканих коефіцієнтів при рівновіддалених значеннях аргумента.

В частковому випадку прямолінійної залежності (1.55) формула середньої квадратичної похибки коефіцієнта

$$m_b = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{\text{n - 2}} \frac{1}{[x^2]}}, \qquad (2.13)$$

При рівновідстоячих значеннях аргумента формула приймає вигляд

$$m_b = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{\text{n(n - 1)}} \frac{1}{x_1^2 + x_1\chi(n-1)\chi^2 \frac{(n-1)(2n-1)}{6}}}. \qquad (2.14)$$

Практична робота 2

Необхідно виконати оцінку точності визначених коефіцієнтів $a, b.$ у попередній роботі.

Оцінку точності будемо виконувати за формулами (2.10)

Зроблені раніше зауваження відносно небажаності такого перетворення залишаються в силі для цього і для всіх аналогічних випадків.

4.6. Побудова математичної моделі квадратичною залежністю, коли b=0, c=0

При цьому

$$y = ax^2 . \qquad (4.64)$$

В даному випадку складається одне нормальне рівняння

$$a[x^4] = [x^2 y] \ . \qquad (4.65)$$

Із якого слідує

$$a = \frac{[x^2 y]}{[x^4]} x^2 . \qquad (4.67)$$

Ймовірніше значення функції буде

$$\varphi(x) = \frac{[x^2 y]}{[x^4]} x^2 . \qquad (4.67)$$

Експериментальна крива проходить через точки

$$(0;\, 0) \ , \qquad \left(1; \frac{[x^2 y]}{[x^4]}\right), \qquad \left(\frac{[x^4]}{[x^2 y]}; 1\right) \qquad . \qquad (4.68)$$

Контрольною являється формула

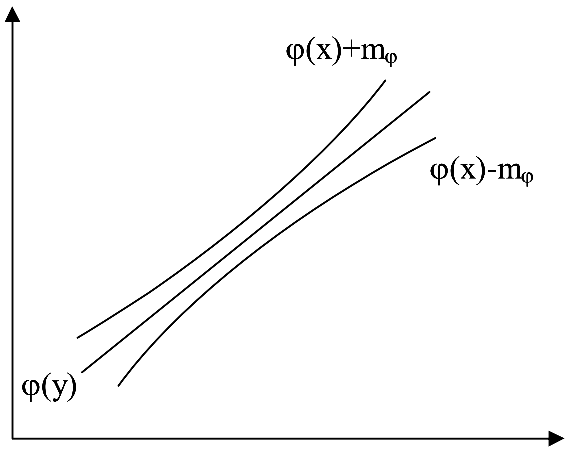

Рис.3.1. Зона розсіювання функції

$\varphi(x) = bx + a$

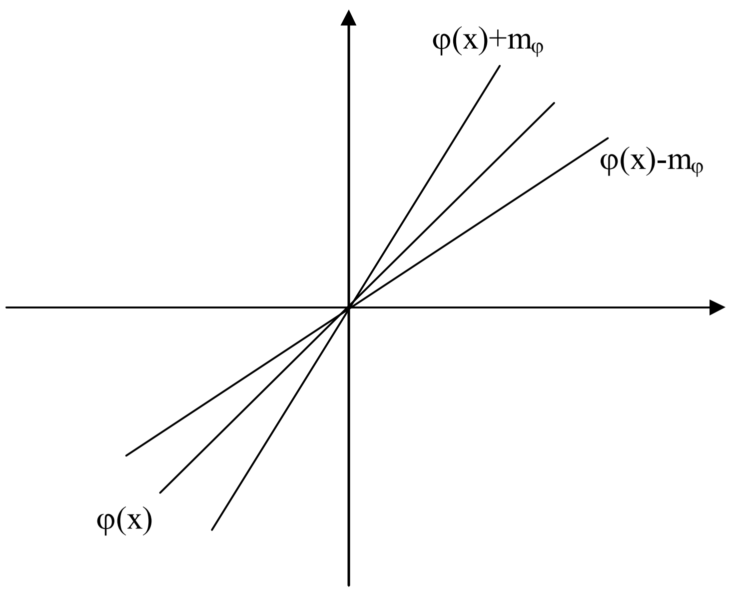

Рис. 3.2. Зона розсіювання функції $\varphi(x) = bx$

Значення аргумента, який відповідає наперед заданому значенню середньої квадратичної похибки, визначається за формулою

$$x = \frac{1}{m_b}\sqrt{m_\varphi^2 - m_{\frac{[Y]}{n}}^{\ 2}} + \frac{[x]}{n} \quad . \tag{3.15}$$

Для неповного рівняння прямої (1.58)

$$\varphi(x) = \frac{[yx]}{[x^2]} = bx \, . \tag{3.16}$$

Середня квадратична похибка зрівноваженої функції виражається формулою

$$m_\varphi = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-1}\cdot\frac{x^2}{[x]}} = m_b x \, . \tag{3.17}$$

Із цієї формули слідує, що середня квадратична похибка неповного рівняння прямої зростає пропорційно значенню абсциси в обидві сторони від точки (x = 0, y = o). В точці (0; 0) $m_\varphi = 0$. Зона розсіювання в цьому випадку обмежується двома прямими, які проходять через точку (0; 0) arctg (b ± m_b). (рис. 3.2)

$$b = \frac{[q]}{n} - a\frac{[s]}{n} \, . \tag{4.58}$$

Зрівноважене значення функції запишеться

$$q(x) = ax^2 + bx \, . \tag{4.59}$$

Попередній контроль виконується за формулою

$$[q^2] - a[qx] - b[q] = [\eta\eta] \, . \tag{4.60}$$

Кінцева контрольна формула має вигляд

$$a(a[x^4] + b[x^3] - 2[qx^3]) + b(a[x^3] - 2[qx^2]) + [q^2x^2] = [\eta\eta xx]. \tag{4.61}$$

При рівновідстоячих значеннях аргумента величини, які входять у формули для визначення коефіцієнтів і в контрольні формули, підраховуються за формулами як і в попередньому випадку.

Підстановка (4.58) в (4.59)

$$\varphi(x) = a\left(x^2 - \frac{[x]}{n}x\right) + \frac{[q]}{n}x \quad . \tag{4.62}$$

дає можливість визначити координати точки, розташованої на експериментальній кривій, які просто виражаються через результати визначень, а саме

$$x = \frac{[x]}{n}; y = \frac{[q][x]}{n^2} \quad . \tag{4.63}$$

$$q = ax + b, \qquad (4.53)$$

де

$$q = \frac{y}{x}.$$

Рішення цього рівняння ведеться за формулами прямолінійної залежності.

Початкові рівняння мають вигляд

$$\begin{aligned} &ax_1 + b - q_1 = \eta_1, \\ &ax_2 + b - q_2 = \eta_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &ax_n + b - q_n = \eta_n. \end{aligned} \qquad (4.54)$$

При цьому

$$q_1 = \frac{y_1}{x_1}, q_2 = \frac{y_2}{x_2}, \ldots, q_n = \frac{y_n}{x_n} \quad . \qquad (4.55)$$

Система нормальних рівнянь буде

$$\begin{aligned} &a[x^2] + b[x] - [qx] = 0, \\ &a[x] + bn - [q] = 0. \end{aligned} \qquad (4.56)$$

Звідки

$$a = \frac{n[qx] - [x][q]}{n[x^2] - [x][x]}, b = \frac{[x^2][q] - [qx][x]}{n[x^2] - [x][x]} \quad . \qquad (4.57)$$

Коефіцієнт b можна обчислити і за допомогою формули

Практична робота 3

Задача 1.

Підрахувати середню квадратичну похибку зрівноваженої функції у для всіх випадків повного рівняння прямої y = a + bx = 30,27 – 7,88x.

Рішення.

1. Підрахуємо середню квадратичну похибку арифметичної середини за формулою (3.11)

$$m_{\frac{[y]}{n}} = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-2} \cdot \frac{1}{n}} .$$

Приймаючи до уваги, що на попередньому практичному занятті нами була підрахована середня квадратична похибка одиниці ваги за формулою

$$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-2}} .$$

то з врахуванням даної формули запишемо

$$m_{\frac{[y]}{n}} = \frac{m}{\sqrt{n}} .$$

і в нашому випадку

$$m_{\frac{[y]}{n}} = \frac{0{,}692}{\sqrt{10}} = 0{,}219 .$$

2. Підрахуємо середню квадратичну похибку зрівноваженої функції для всіх випадків повного рівняння прямої при m_b = 0,419, а. $my = \sqrt{m_b^2\left(x - \frac{[x]}{n}\right)^2 + m_{\frac{[y]}{n}}^2}$.

Таблиця 2.1. Розрахунок середньої квадратичної похибки зрівноваженої функції.

№	x	y	m_φ
1.	1,6	18	0,617
2.	2	14	0,524
3.	2,1	13	0,506
4.	2,3	12	0,480
5.	2,5	11	0,469
6.	2,8	9	0,479
7.	2,9	8	0,489
8.	3	7	0,503
9.	3,1	6	0,520
10.	3,3	3	0,561
n=10	**25,6**	**101**	**Σ 5,148**

Перший модуль- практичні роботи 1-3.

$$a[x^4] + b[x^3] - [x^2y] = 0,$$
$$a[x^3] + b[x^2] - [xy] = 0. \qquad (4.47)$$

із яких

$$a = \frac{[yx^2][x^2] - [xy][x^3]}{[x^4][x^2] - [x^3][x^3]},$$
$$b = \frac{[yx][x^4] - [x^2y][x^3]}{[x^4][x^2] - [x^3][x^3]}. \qquad (4.48)$$

Коефіцієнт b можна підрахувати і за формулою

$$b = \frac{[xy]}{[x^2]} - a\frac{[x^3]}{[x^2]}. \qquad (4.49)$$

Контрольна формула має вигляд

$$[y^2] - a[x^2y] - b[xy] = [\varepsilon\varepsilon] \quad . \qquad (4.50)$$

Шукане рівняння запишеться у вигляді

$$\varphi(x) = ax^2 - a\frac{[x^3]}{[x^2]}x + \frac{[xy]}{[x^2]}x \, . \qquad (4.51)$$

Зрівноважена крива проходить через точки з координатами

$$(0;\,0), \quad \left(\frac{[x^3]}{[x^2]};\frac{[xy][x^3]}{[x^2][x^2]}\right), \qquad \left(\frac{[x^4]}{[x^3]};\frac{[x^2y][x^4]}{[x^3][x^3]}\right). \qquad (4.52)$$

На практиці знайшов застосування прийом, який заключається в тому, що праву і ліву частини рівняння (4.45) ділять на x, в результаті чого отримують рівняння першого степеня відносно x

Звідси

$$\begin{aligned} a &= a', \\ b &= b' - 2a'x_1, \\ c &= c' + a'x^2 - b'x_1 + y_1. \end{aligned} \tag{4.43}$$

Правильність обчислень контролюється за допомогою формули

$$[y^2] - [y]\left\{ax_1{}^2 + bx_1 + c + a\chi(n-1)\left(x_1 + \chi\frac{2n-1}{6} + 6\chi\frac{n-1}{2}\right)\right\} -$$
$$- \chi[k(n-k)\Delta y](ax_1 + \frac{b}{2}) - a\chi\left(\frac{n-1}{2}[k(n-k)\Delta y_k] - \frac{[kn-k)(n-2k)\Delta y_k]}{}\right) = [\varepsilon\varepsilon] \tag{4.44}$$

4.5. Побудова математичної моделі квадратичною залежністю, коли С = 0

При цьому

$$y = ax^2 + bx \quad . \tag{4.45}$$

Початкові рівняння для цього випадку будуть

$$\begin{aligned} &ax_1{}^2 + bx_1 - y_1 = \varepsilon_1, \\ &ax_2{}^2 + bx_2 - y_2 = \varepsilon_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &ax_n{}^2 + bx_n - y_n = \varepsilon_n. \end{aligned} \tag{4.46}$$

Невідомі коефіцієнти a і b визначаються із рішення двох нормальних рівнянь

Лекція 4. Побудова математичної моделі результатів психолого-педагогічного експерименту квадратичним поліномом

4.1. Теоретичні основи

Математична модель результатів психолого-педагогічного експерименту виражається квадратичним поліномом виду

$$y = ax^2 + bx + c\,, \tag{4.1}$$

або

$$y = ax^2 + bx \quad , \tag{4.2}$$

або $$y = ax^2 \quad . \tag{4.3}$$

Утворимо систему n **початкових** рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{aligned} &ax_1^2 + bx_1 + c - y_1 = \varepsilon_1, \\ &ax_2^2 + bx_2 + c - y_2 = \varepsilon_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &ax_n^2 + bx_n + c - y_n = \varepsilon_n. \end{aligned} \quad . \tag{4.4}$$

Застосувавши вимогу найменших квадратів

$$[\varepsilon\varepsilon] = [(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2] = \min\,. \tag{4.5}$$

будемо мати три нормальних рівняння з трьома невідомими

$$
\begin{aligned}
&a[x^4]+b[x^3]+c[x^2]=[x^2y],\\
&a[x^3]+b[x^2]+c[x]=[xy],\\
&a[x^2]+b[x]+c\cdot n=[y].
\end{aligned} \tag{4.6}
$$

Рішення цих рівнянь приводить до визначення невідомих коефіцієнтів

(4.7)

$$a=\frac{[x^2y]\,(n[x^2]\overset{A}{-}[x][x])+[xy]\,([x][x^2]\overset{B}{-}n[x^2])+[y]\,([x][x^3]\overset{C}{-}[x^2][x^2])}{n\,([x^2][x^4]\underset{D}{-}[x^3][x^3])+[x]\,([x^2][x^3]\underset{E}{-}[x][x^4])+[x^2]\,([x][x^3]\underset{C}{-}[x^2][x^2])},$$

$$b=\frac{[x^2y]\,(n[x^2]\overset{B}{-}n[x^3])+[xy]\,(n[x^4]\overset{E}{-}[x^2][x^2])+[y]\,([x^2][x^3]\overset{E}{-}[x][x^4])}{n\,([x^2][x^4]\underset{D}{-}[x^3][x^3])+[x]\,([x^2][x^3]\underset{E}{-}[x][x^4])+[x^2]\,([x][x^3]\underset{C}{-}[x^2][x^2])},$$

$$c=\frac{[x^2y]\,([x][x^3]\overset{C}{-}[x^2][x^2])+[xy]\,([x^2][x^3]\overset{E}{-}[x][x^4])+[y]\,([x^2][x^4]\overset{D}{-}[x^3][x^3])}{n\,([x^2][x^4]\underset{D}{-}[x^3][x^3])+[x]\,([x^2][x^3]\underset{E}{-}[x][x^4])+[x^2]\,([x][x^3]\underset{C}{-}[x^2][x^2])}.$$

Зрівноважене рівняння буде

$$\varphi(x)=ax^2+bx+c \quad . \tag{4.8}$$

Склавши різниці $\varphi(x_i)-y_i=\varepsilon_i$, де y_i – визначені значення, а ε_i – відхилення визначених значень y_i від їх ймовірних значень, отримаємо перше представлення про точність виконаних робіт.

Контрольна формула обчислення коефіцієнтів легко виводиться із (4.4) (4.6) і умови $[\varepsilon\varepsilon]=\min$.

$$[y^2]-a[yx^2]-b[yx]-c[y]=[\varepsilon\varepsilon] \quad . \tag{4 .9}$$

$$[y]=[(k-1)\Delta y_k],$$

$$[xy]=\chi\left\{\frac{n(n-1)}{2}[\Delta y]-\frac{[k(k-1)(2k-1)\Delta y_k]}{6}\right\}. \tag{4.38}$$

Аналогічно

$$[x^2y]=\chi^2\left\{\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}[\Delta y]-\frac{[k(k-1)(2k-1)\Delta y_k]}{6}\right\}. \tag{4,39}$$

Підстановка значень цих різниць, а також сум [x], [x^2], [x^3] при рівновідстоячих значеннях аргумента в (4.18) дає вираз шуканих коефіцієнтів через кінцеві різниці першого порядку

$$a'=\frac{30[k(n-k)(n-2k)\Delta y_k]}{\chi^2 n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)},$$

$$b'=\frac{6(n-1)(n+2)[(n-k)\Delta y_k]-5(n-1)[k(n-k)(n-2k)\Delta y_k]}{\chi n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)},$$

$$c'=\frac{(n+1)(n+2)[(n-k)\Delta y_k]-3(n+2)[k(n-k)(n-2k)\Delta y_k]}{n(n+1)(n+2)}-$$

$$-\frac{5[k(n-k)(n-2k)\Delta y_k]}{n(n+1)(n+2)}.$$

(4.40)

Після обчислення a\`, b\`, c\` будемо мати рівняння

$$\varphi(x')=a'x^2+b'x+c' , \tag{4.41}$$

або, повертаючись до початкового рівняння,

$$\varphi(x)=a'(x-x_1)^2+b'(x-x_1)+c'+y_1 . \tag{4.42}$$

$$a' = \frac{180\left\{(n-1)[(k-1)y_{\kappa}] - [(k-1)^2 y_k] - \frac{(n-1)(n-2)}{6}[y]\right\}}{\chi^2 n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)},$$

$$b' = \frac{180\left\{(n-1)[(k-1)^2 y_k] - \frac{(2n-1)(8n-1)}{15}[(k-1)y_k] + \frac{(n-1)(2n-1)(n-2)}{10}[y]\right\}}{\chi n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)},$$

$$c_0 = \frac{3\{6(2n-1)[(k-1)y_k] - 10[(k-1)^2 y_k] - (3n^2-3n+2)[y]\}}{n(n+1)(n+2)}. \tag{4.34}$$

Підставляючи у вихідне рівняння (4.7) отримані значення коефіцієнтів, визначених при умові, що x_i` = x_i– x_1, знайдемо

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= a'x'^2 + b'x' + c' = a'(x - x1) + b'(x - x1) + c' = \\ &= a'x^2 + (b' - 2a'x)x + (a'x2 - b'x + c')\end{aligned}. \tag{4.35}$$

Звідки

$$\begin{aligned}a &= a',\\ b &= b' - 2a'x_1,\\ c &= a'x^2 - b'x_1 + c'.\end{aligned} \tag{4.36}$$

Контрольна формула буде

$$\begin{aligned}&[y^2] - a(x^2[y] + 2x_1\chi[(k-1)y_k] + \chi^2[(k-1)^2 y_k]) - \\ &- b(x_1[y] + \chi[(k-1)y_k] - c[y]) = [\varepsilon\varepsilon].\end{aligned} \tag{4,37}$$

Можна добитися і подальших спрощень, виразивши визначені значення функції через кінцеві різниці першого порядку.

Якщо прийняти $y_1 = 0$, то формули (1.44) і (1.45) спрощуються

Замітимо, що корені рівняння (4.8) не виражаються простими величинами, як для випадку прямолінійної залежності.

Обчислення коефіцієнтів b і c можна значно спростити, якщо виразити їх із (4.6) через коефіцієнт a

$$b = \frac{n[yx] - [y][x]}{n[x^2] - [x][x]} + a\frac{[x][x^2] - n[x^3]}{n[x^2] - [x][x]}, \tag{4.10}$$

$$c = \frac{[y][x^2] - [x][xy]}{n[x^2] - [x][x]} + a\frac{[x][x^3] - [x^2][x^2]}{n[x^2] - [x][x]}. \tag{4.11}$$

Введемо позначення

$$\begin{aligned}&A = n[x^2] - [x][x]; B = [x][x^2] - n[x^2]; C = [x][x^3] - [x^2][x^2];\\ &D = [x^2][x^4] - [x^3][x^3]; E = [x^2][x^3] - [x][x^4]; F = n[x^4] - [x^2][x^2]\end{aligned} \tag{4.12}$$

Тоді формули (4.7) будуть

$$\begin{aligned}a &= \frac{[x^2y]\cdot A + [xy]\cdot B + [y]\cdot C}{n\cdot D + [x]\cdot E + [x^2\cdot C]},\\ b &= \frac{[x^2y]\cdot B + [xy]\cdot F + [y]\cdot E}{n\cdot D + [x]\cdot E + [x^2]\cdot C},\\ c &= \frac{[x^2y]\cdot C + [xy]\cdot E + [y]\cdot D}{n\cdot D + [x]\cdot E + [x^2]\cdot C}.\end{aligned} \tag{4.13}$$

Підставивши (4.10), (4.11) у (4.8), отримаємо

$$\varphi(x) = ax^2\left\{\frac{n[yx]-[x][y]+a[x][x^2]-n[x^3]}{n[x^2]-[x][x]}\right\}x + \qquad . \qquad 4.14)$$

$$+\frac{[y][x^2]-[x][yx]+a[x][x^3]-[x^2][x^2]}{n[x^2]-[x][x]}$$

Отримана крива завжди проходить через точки

$$\left(0;\frac{a[x][x^3]-[x^2][x^2]+[y][x^2]-[x][yx]}{n[x^2]-[x][x]}\right),$$

$$\left(\frac{[x]}{n};a\frac{[x][x]-n[x^2]}{n^2}+\frac{[yx]}{x}\right), \qquad (4.15)$$

$$\left(\frac{[x^2]}{[x]};a\frac{[x^2][x^2]-[x][x^3]}{[x][x]}+\frac{[yx]}{[x]}\right).$$

4.2. Поступальне переміщення початку координат в точку арифметичної середини

Всі приведені формули суттєво спрощуються, якщо перемістити початок координатної системи в точку

$$\left(\frac{[x]}{n};\frac{[y]}{n}\right).$$

Нові координати будуть виражатися через старі наступним чином

$$[\delta y^2]-\delta a[x^2\delta y]-\delta b[x\delta y]-\delta c[\delta y]=[\varepsilon\varepsilon]. \qquad (4.32)$$

4.4. Обробка матеріалів при рівновідстоячих значеннях аргументів

Позначивши інтервал аргумента через x і число визначень n за допомогою формул

$$X = x_i - x_1,$$

$$[X] = \chi\frac{n[n-1]}{2},$$

$$[X^2] = \chi 2\frac{n(n-1)(2n-1)}{6},$$

$$[X^3] = \chi^3\frac{n^2(n-1)^2}{4},$$

……………………………………….

$$[X^i] = \chi i\sum_0^n [k-1]^i,$$

$$[Xy] = \chi[(k-1)y_k], \qquad (4.33)$$

$$[Xy]^2 = \chi[(k-1)y_k{}^2],$$

$$[Xy^i] = \chi[(k-1)y_k{}^i],$$

$$[X^2y] = \chi^2[(k-1)^2y_k],$$

$$[X^3y] = \chi^3[(k-1)^3y_k],$$

$$[X^iy^i] = \chi^i[(k-1)^iy^i{}_k].$$

формули (4.18) приводять до виду

$$\delta a = \frac{[x^2\delta y](n[x^2]-[x][x]) + [x\delta y]([x]x^2) - n[x^3] + [\delta y]([y][y^3]-[x^2][x^2])}{n([x^2][x^4]-[x^3][x^3]) + [x]([x^2][x^3]-[x][x^4]) + [x^2]([x][x^3]-[x^2][x^2])}$$

(4.29)

$$\delta b = \frac{[x^2\delta y]([x][x^2]-n[x^3]) + [x\delta y](n[x^4]-[x^2][x^2]) + [\delta y]([x^2][x^3]-[x][x^4])}{n([x^2][x^4]-[x^3][x^3]) + [x]([x^2][x^3]-[x][x^4]) + [x^2]([x][x^3]-[x^2][x^2])}$$

$$\delta c = \frac{[x^2 y]([x][x^3]-[x^2][x^2]) + [x\delta y]([x^2][x^2]) - [x][x^4] + [\delta y]([x^2][x^4]-[x^3][x^3])}{n([x^2][x^4]-[x^3][x^3]) + [x]([x^2][x^3]-[x][x^4]) + [x^2]([x][x^3]-[x^2][x^2])}$$

Поправки δb і δc можна підрахувати і по більш простим формулам

$$\delta b = \frac{n[\delta y \cdot x]-[x][\delta x]}{n[y^2]-[x][x]} + \delta a \frac{[x][x^2]-n[x^3]}{n[x^2]-[x][x]},$$

(4.30)

$$\delta y = \frac{[\delta y][x^2]-[y][\delta y \cdot x]}{n[x^2]-[x][x]} + \delta a \frac{[x][x^3]-[x^2][x^2]}{n[x^2]-[x][x]}.$$

Додаючи поправки δa, δb, δc до наближених коефіцієнтів a_l, b_l, c_l, отримаємо кінцеві значення шуканих коефіцієнтів

$$\begin{aligned} a &= a_l + \delta a, \\ b &= b_l + \delta b, \\ c &= c_l + \delta c. \end{aligned} \qquad (4.31)$$

Контрольна формула буде

$$x' = x - \frac{[x]}{n}, \qquad (4.16)$$
$$y' = y - \frac{[y]}{n}.$$

При цьому $[x'] = [y'] = 0$

Формули (4.7) перетворюються до виду

$$a' = \frac{n([x'^2 \cdot y'][x'^2]-[x'y'][x'^3])}{n([x'^2][x'^4]-[x'^3][x'^3])-[x'^2][x'^2][x'^2]},$$

$$b' = \frac{n([x' \cdot y'][x'^4]-[x'^2 y'][x'^3])-[x'y'][x'^2][x'^2]}{n([x'^2][x'^4]-[x'^3][x'^3])-[x'^2][x'^2][x'^2]}, \quad (4.18)$$

$$c' = \frac{[x'^2]([x'y'][x'^3]-[x'^2 y'][x'^2])}{n([x'^2][x'^4]-[x'^3][x'^3])-[x'^2][x'^2][x'^2]}.$$

Коефіцієнти b\` і c\` можна виразити також і через коефіцієнт a\`

$$b' = \frac{[x'y']-a'[x'^2]}{[x'^2]}, \quad c' = \frac{a'[x'^2]}{n}. \qquad (4.19)$$

Ймовірніша крива має вигляд

$$\varphi(x') = a'x'^2 + b'x' + c'. \qquad (4.20)$$

Або в початкових координатах

$$\varphi(x) - \frac{[y]}{n} = a'\left(x - \frac{[x]}{n}\right)^2 + b'\left(x - \frac{[x]}{n}\right) + c'. \qquad (4.21)$$

Співставленням (4.21) з (4.1) находимо

$$a = a',$$
$$b = b' - 2a'\frac{[x]}{n}, \qquad (4.22)$$
$$c = c' + a'\left(\frac{[x]}{n}\right)^2 - b'\left(\frac{[x]}{n}\right) + \frac{[y]}{n}.$$

Крива (4.20) проходить через точки

$$\left(0;-a'\frac{[x'^2]}{n}\right),$$
$$\left(-\frac{[x]}{n};a'\left(\frac{[x]}{n}\right)^2 - b'\frac{[x]}{n} + c'\right), \qquad (4.23)$$
$$\left(\frac{[x]}{n};a'\left(\frac{[x]}{n}\right)^2 + b'\frac{[x]}{n} + c'\right).$$

Обчислення контролюються формулою

$$[y^2] - \left([x'^2 y'] + [x'^2]\frac{[y]}{n} + [x'y']\frac{[x]}{n} + \left(\frac{[x]}{n}\right)^2 [y]\right)a - $$
$$-\left([x'y'] + \frac{[x][y]}{n}b - c[y]\right)b - c[y] = [\varepsilon\varepsilon] \qquad . (4.24)$$

Якщо одна із величин [x`], [y`] або обидві точно не рівні нулю, а є невеликою величиною нехтувати якою не можна, то a`, b`, c` вичисляються за формулами (4.13). При цьому переваги перетворень повністю не використовуються, але все ж досягаються полегшення у обчислювальних роботах.

4.3. Знаходження поправок до наближених значень коефіцієнтів

Один із прийомів раціоналізації обробки матеріалів заключається в тому, що знаходяться не повні значення коефіцієнтів, а поправки до наближених їх значень a_l, b_l, c_l, отриманих на основі даних експериментальних визначень.

В даному випадку будемо мати систему початкових рівнянь

$$y_i - y_{li} = (a - a_l)y_i^2 + (b - b_l)y_i + (c - c_l)\,, \qquad (4.25)$$

де

$$y_{li} = a_l x_i^2 + b_l x_i + c_l\,, \qquad (4.26)$$

або

$$\begin{aligned}
&\delta a x_1^2 + \delta b x_1 + \delta c - \delta y_1 = \varepsilon_1,\\
&\delta a x_2^2 + \delta b x_2 + bc - \delta y_2 = \varepsilon_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\delta a x_n^2 + \delta b x_n + \delta c - \delta y_n = \varepsilon_n.
\end{aligned} \qquad (4.27)$$

При цьому система нормальних рівнянь

$$\begin{aligned}
&\delta a[x^4] + \delta b[x^3] + \delta c[x^2] - [\delta y x^2] = 0,\\
&\delta a[x^3] + \delta b[x^2] + \delta c[x] - [\delta y x] = 0,\\
&\delta a[x^2] + \delta b[x] + [c]n - [\delta y] = 0.
\end{aligned} \qquad (4.28)$$

Звідси значення поправок δa, δb, δc будуть

$$m_\varphi = \sqrt{m_a^2 x^4 + m_b^2 x^2 + m_c^2 + 2\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-3}\frac{E}{S}},$$

де

$$E = ([x][x^2] - n[x^3])x^3 + ([x][x^3] - \\ -[x^2][x^2])x^2 + ([x^2][x^3] - [x][x^4])x,$$

$$S = n([x^2][x^4] - [x^3][x^3]) + [x]([x^2][x^3] - \\ -[x][x^4]) + [x^2]([x][x^3] - [x^2][x^2]).$$

На попередній практичній роботі нами були встановлені середні квадратичні похибки зрівноважених коефіцієнтів

$m_a = 0{,}899$; $m_b = 4{,}464$; $m_c = 5{,}360$.

Там же був визначений параметр S = 16,655688, який є не чим іншим як визначником системи нормальних рівнянь.

Таблиця 6.1

Розрахунок середньої квадратичної похибки зрівноваженої функції

№	x	y	E	m_φ^2	m_φ
1	1,6	18	–1427,80	0,37	0,608
2	2	14	–2045,59	0,063	0,251
3	2,1	13	–2230,49	0,054	0,232

$$[y^2] - a[x^2 y] = [\varepsilon\varepsilon] \quad . \tag{4.69}$$

Якщо праву і ліву частини рівняння поділити на x, то отримаємо прямолінійну залежність

$$q = ax \quad . \tag{4.70}$$

Коефіцієнт a знаходиться за формулою

$$a = \frac{[qx]}{[x^2]}. \tag{4.71}$$

Попередній контроль виконують за формулою

$$[q^2] - a[qx] = [\eta\eta]. \tag{4.72}$$

Кінцева контрольна формула має вигляд

$$a(a[x^4] - 2[qx^2]) + [q^2 x^2] = [\eta\eta xx]. \tag{4.73}$$

Практична робота 4

Побудуємо математичну модель залежності ситуативної тривожності від характеристик пам'яті за даними, приведеними в табл. 1.3 поліномом другого порядку виду $y = ax^2 + bx + c$.

При знаходженні емпіричної формули, як правило, вибирають лише частину вітки параболи, яка кращим чином підходить до даних експерименту.

Таблиця 4.1

Обчислювальна таблиця для побудови поліному другого порядку

№	xi	yi	xiyi	xi²	yi²
1	1,6	18	28,8	2,56	324
2	2	14	28	4	196
3	2,1	13	27,3	4,41	169
4	2,3	12	27,6	5,29	144
5	2,5	11	27,5	6,25	121
6	2,8	9	25,2	7,84	81
7	2,9	8	23,2	8,41	64
8	3	7	21	9	49
9	3,1	6	18,6	9,61	36
10	3,3	3	9,9	10,89	9
n=10	25,6	101	237,1	68,26	1193

№	xi3	xi4	yixi²
1	4,096	6,5536	46,08
2	8	16	56
3	9,261	19,4481	57,33
4	12,167	27,9841	63,48
5	15,625	39,0625	68,75
6	21,952	61,4656	70,56
7	24,389	70,7281	67,28
8	27	81	63
9	29,791	92,3521	57,66
10	35,937	118,5921	32,67
n=10	188,218	533,1862	582,81

Для випадку

$$y = ax^2, \tag{6.25}$$

формула середньої квадратичної похибки зрівноваженої функції

$$m_\varphi = \sqrt{\frac{[EE]}{n-1} \cdot \frac{x^4}{[x^4]}}\ . \tag{6.26}$$

Якщо для рішення задачі застосовувалася формула

$$q = ax\ , \tag{6.27}$$

то

$$m_q = \sqrt{\frac{[\eta\eta]}{n-1} \cdot \frac{x^2}{[x^2]}}, \tag{6.28}$$

$$m_\varphi = m_q x\,. \tag{6.29}$$

Практична робота 6

Підрахувати середню квадратичну похибку зрівноваженої функції

$y = ax^2 + bx + c = –0,78308x^2 – 4,00513x + 25,69847$

для всіх випадків рівняння апроксимуючої функції.

Рішення.

Середню квадратичну похибку функції будемо розраховувати за формулою похибка функції отримує мінімальне значення, збільшуючись до кінців інтервалу і за межами його.

Зона розсіювання обмежується кривими, які проходять через точки з абсцисами $\sqrt{\frac{[x^2]}{n}}$ і $\frac{[x]}{n}$.

$$\varphi(x) = ax^2 + bx + c \pm m_\varphi, \qquad (6.21)$$

де m_φ виражається формулою (6.17) (рис.6.1)

У випадку квадратичної залежності (4.45)

$$\varphi(x) = ax^2 + bx \qquad (6.22)$$

середня квадратична похибка виражається формулою

$$m_\varphi = \sqrt{m_a^2 x^4 + m_b^2 x^2 - 2\frac{[EE]}{n-3} \cdot \frac{[x^3]}{[x^4][x^2]-[x^3][x^3]} x^3} \ . \ (6.23)$$

При перетворенні рівняння до прямолінійної залежності шляхом ділення правої і лівої частини (6.22) на x

$$q = ax + b,$$

формули середньої квадратичної похибки зрівноваженої функції

$$m_q = \sqrt{m_a^2 x^2 + m_b^2 - 2\frac{[EE]}{n-2} \cdot \frac{[x]}{n[x^2]-[x][x]} x},$$

$$m_\varphi = m_q x. \qquad (6.24)$$

№	yi`	E=y`-y	EE
1	17,286	-0,714	0,50980
2	14,556	+0,556	0,30914
3	13,834	+0,834	0,69556
4	12,344	+0,344	0,118,34
5	10,791	-0,209	0,04368
6	8,345	-0,655	0,42902
7	7,498	-0,502	0,25200
8	6,635	-0,365	0,13322
9	5,757	-0,243	0,05905
10	3,954	+0,954	0,91012
n=10	101,00	0	3,45993

Робочі формули (4.12), (4.13)

$A = n[x^2]-[x][x] = 10 \cdot 68{,}26 - 25{,}6 \cdot 25{,}6 = 27{,}24,$

$B = [x][x^2]-n[x^2] = 25{,}6 \cdot 68{,}26 - 10 \cdot 188{,}218 = -134{,}724,$

$C = [x][x^3]-[x^2][x^2] = 25{,}6 \cdot 188{,}218 - 68{,}26 \cdot 68{,}26 = 158{,}9532,$

$D = [x^2][x^4]-[x^3][x^3] = 68{,}26 \cdot 533{,}1862 - 188{,}218 \cdot 188{,}218 = 969{,}274488,$

$E = [x^2][x^3]-[x][x^4] = 68{,}26 \cdot 188{,}218 - 25{,}6 \cdot 533{,}1862 = -801{,}80604,$

$F = n[x^4]-[x^2][x^2] = 10 \cdot 533{,}1862 - 68{,}26 \cdot 68{,}26 = 672{,}4344.$

$$a=\frac{[x^2y]\cdot A+[xy]\cdot B+[y]\cdot C}{n\cdot D+[x]\cdot E+[x^2\cdot C]}=$$

$$=\frac{582{,}81\cdot 27{,}24+237{,}1\cdot(-134{,}724)+101\cdot 158{,}9532}{10\cdot 969{,}274488+22{,}6\cdot(-801{,}80604)+68{,}26\cdot 158{,}9532}=$$

$$=\frac{-13{,}0428}{16{,}655688}=-0{,}783083833,$$

$$b=\frac{[x^2y]\cdot B+[xy]\cdot F+[y]\cdot E}{n\cdot D+[x]\cdot E+[x^2]\cdot C}=$$

$$=\frac{582{,}81\cdot(-134{,}724)-237{,}1\cdot 672{,}4344+101\cdot(-801{,}80604)}{16{,}655688}=$$

$$=\frac{-66{,}70824}{16{,}655688}=-4{,}005132661,$$

$$c=\frac{[x^2y]\cdot C+[xy]\cdot E+[y]\cdot D}{n\cdot D+[x]\cdot E+[x^2]\cdot C}=$$

$$=\frac{582{,}81\cdot 158{,}9532+237{,}1(-801{,}80604)+101\cdot 969{,}74}{16{,}655688}=$$

$$\frac{428{,}025696}{16{,}655688}=25{,}69846986.$$

Таким чином, на основі проведених розрахунків отримана формула

$$y=-0{,}783083833x^2-4{,}005132661x+2{,}69846986\,.$$

Виконаємо контроль зрівноваження за формулою

$$[y^2]-a[yx^2]-b[yx]-c[y]=[\varepsilon\varepsilon].$$

В нашому випадку

В даному випадку

$$m_\varphi=\sqrt{m_b^2\left(x-\frac{[x]}{n}\right)^2+m^2_{\frac{[Q]}{n}}}\;. \qquad (6.19)$$

При значеннях x рівному $\frac{[x]}{n}$, на величину середньої квадратичної похибки функції не впливає похибка коефіцієнта

$$m_\varphi=\sqrt{m_a^2+\left(x^2-\frac{[x^2]}{n}\right)^2+m^2_{\frac{[y]}{n}}}\;. \qquad (6.20)$$

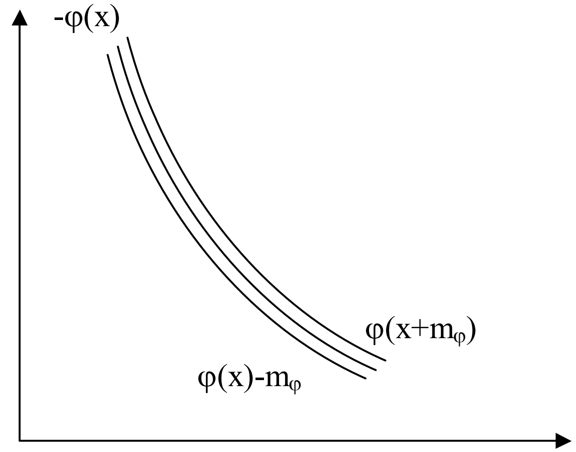

Рис.6.1. Зона розсіювання функції $\varphi(x)=ax^2+bx+c$

Таким чином, при одному із зазначених в середній частині інтервалу спостережень, середня квадратична

У цій формулі залежними величинами від результатів експерименту, являються a, b і $\frac{[y]}{n}$. Знаходячи середню квадратичну похибку цього виразу по наведеним вище правилам і маючи на увазі, що

$$\frac{\partial\frac{[y]}{n}}{\partial y_i}=\frac{1}{n}; \qquad \left[\left(\frac{\partial\frac{[y]}{n}}{\partial y}\right)^2\right]=\frac{1}{n}, \qquad (6.16)$$

отримаємо після всіх дій і перетворень

$$m_\varphi=\frac{\sqrt{m_a^2\left(x^2-\frac{[x^2]}{n}\right)^2+m_b^2\left(x-\frac{[x]}{n}\right)^2+m^2_{\frac{[y]}{n}}+}}{+2\frac{[EE]}{n-3}\frac{([x][x^2]-n[x^3])(x^2-\frac{[x^2]}{n})(x-\frac{[x]}{n})}{S}}, \qquad (6.17)$$

де

$$S=n([x^2][x^4]-[x^3][x^3])+[x]([x^2][x^3]-[x][x^4])+ \\ +[x^2]([x][x^3]-[x^2][x^2]), \qquad (6.18)$$

$$m^2_{\frac{[y]}{n}}=\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n(n-3)}.$$

Розглядаючи цей вираз, бачимо, що при значеннях x рівному $\sqrt{\frac{[x^2]}{n}}$, похибка коефіцієнта a не впливає на величину середньої квадратичної похибки функції.

$$1193+0{,}783083833\cdot 582{,}81+4{,}005132661\cdot 237{,}1+ \\ +25{,}69846986\cdot 101=3{,}460586774.$$

В табл. 4.1 [$\varepsilon\varepsilon$] = 3,45993.

Різниця складає (3,46059 – 3,45993) = 0,00066.

Лекція 5. Оцінка точності результатів при побудові математичної моделі квадратичним поліномом

Перейдемо до формули середньої квадратичної похибки коефіцієнтів a, b, c при параболічній залежності другого степеня.

По аналогії із прямолінійною залежністю, після взяття частинних похідних виразів (4.7) по y_i, підведення до квадрату і додавання, отримаємо

$$\left[\left(\frac{\partial a}{\partial y}\right)^2\right]=\frac{n[x^2]-[x][x]}{S}, \qquad (5.1)$$

$$\left[\left(\frac{\partial b}{\partial y}\right)^2\right]=\frac{n[x^4]-[x^2][x^2]}{S}, \qquad (5.2)$$

$$\left[\left(\frac{\partial c}{\partial Q}\right)^2\right]=\frac{[x^2][x^4]-[x^3][x^3]}{S}, \qquad (5.3)$$

де

$$S = n[x^2][x^4]-[x^3][x^3]+[x]([x^2][x^3]-[x][x^4])+ \\ +[x^2]([x][x^3]-[x^2][x^2]). \tag{5.4}$$

Після підстановки отриманих значень сум частинних похідних у виразах середніх квадратичних похибок будемо мати

$$m_a = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-3}\cdot\frac{n[x^2]-[x][x]}{S}},$$
$$m_b = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-3}\cdot\frac{n[x^4]-[x^2][x^2]}{S}}, \tag{5.5}$$
$$m_c = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-3}\cdot\frac{[x^2][x^4]-[x^3][x^3]}{S}}.$$

Ці ж формули застосовуються і для випадку, коли коефіцієнти вичислені за допомогою (4.29) шляхом зрівноваження поправок до наближених значень невідомих.

Представляючи середню квадратичну похибку одиниці ваги

$$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-3}}, \tag{5.6}$$

а обернені ваги зрівноважених коефіцієнтів

$$\sqrt{\frac{1}{p_a}} = \sqrt{\frac{n[x^2]-[x][x]}{S}}, \tag{5.7}$$

$$E' = (-n[x'^3]-2[x][x'^2])x^3+([x][x'^2]+ \\ +[x'^2]\frac{[x]^3}{n^2}-[x'^2])x^2+([x'^2][x'^3]-[x][x'^4])x, \tag{6.11}$$

$$S' = n([x'^2][x'^4]-[x'^3][x'^3])+[x'^2][x'^2][x'^2]. \tag{6.12}$$

При рівновідстоячих значеннях аргумента величини E і S будуть мати вигляд

$$E = -360\{2x_1+\chi(n-1)\}x^3+60\{6x_1{}^2\chi(n-1)+ \\ +\chi^2(n-1)(n-2)\}x^2-36\{20x_1{}^3+30x_1{}^2\chi(n-1)+ \\ +2x_1\chi^2(7n^2-15n+7)+\chi^3(n-1)(n-2)(2n-1)\}x. \tag{6.13}$$

$$S = \chi^4 n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2). \tag{6.14}$$

Ці формули також застосовують при вираженні шуканих коефіцієнтів a, b, c через кінцеві різниці.

Для того, щоб проаналізувати формулу середньої квадратичної похибки (6.7), придамо їй дещо інший вигляд.

Для цього виразимо c із (4.7) через коефіцієнти a і b

$$c = \frac{[y]}{n}-b\frac{[x]}{n}-a\frac{[x^2]}{n} \tag{6.14}$$

і підставимо його у (4.8)

$$\varphi(x) = a\left(x^2-\frac{[x^2]}{n}\right)+b\left(x-\frac{[x]}{n}\right)+\frac{[y]}{n}. \tag{6.15}$$

$$\left[\frac{\partial a}{\partial y}\cdot\frac{\partial b}{\partial y}\right]x^3 = \frac{1}{S}\left([x][x^2]-n[x^3]\right)x^3,$$

$$\left[\frac{\partial a}{\partial y}\cdot\frac{\partial c}{\partial y}\right]x^2 = \frac{1}{S}\left([x][x^3]-[x^2][x^2]\right)x^2, \qquad (6.6)$$

$$\left[\frac{\partial b}{\partial y}\cdot\frac{\partial c}{\partial y}\right]x = \frac{1}{S}\left([x^3][x^2]-[x][x^4]\right)x.$$

Таким чином, кінцевий результат розрахунку середньої квадратичної похибки зрівноваженої функції при поліномі другої степені буде мати вигляд

$$m_\varphi = \sqrt{m_a^2x^4 + m_b^2x^2 + m_c^2 + 2\frac{[EE]}{n-3}\frac{E}{S}}, \qquad (6.7)$$

де

$$E = ([x][x^2]-n[x^3])x^3 + ([x][x^3]- \\ -[x^2][x^2])x^2 + ([x^2][x^3]-[x][x^4])x, \qquad (6.8)$$

$$\Delta = S = n([x^2][x^4]-[x^3][x^3]) + [x]([x^2][x^3]- \\ -[x][x^4]) + [x^2]([x][x^3]-[x^2][x^2]). \qquad (6.9)$$

Для випадку перетворень за допомогою переносу початку координат в точку $x' = x - \frac{[x]}{n}$ формула (6.7) перетвориться у

$$m_\varphi = \sqrt{m_a^2x^4 + m_b^2x^2 + m_c^2 + 2\frac{[EE]}{n-3}\frac{E'}{S'}}, \qquad (6.10)$$

де

$$\sqrt{\frac{1}{p_b}} = \sqrt{\frac{n[x^4]-[x^2][x^2]}{S}}, \qquad (5.8)$$

$$\sqrt{\frac{1}{p_c}} = \sqrt{\frac{[x^2][x^4]-[x^3][x^3]}{S}}. \qquad (5.9)$$

де ваги коефіцієнтів будуть

$$P_a = \frac{S}{n[x^2]-[x][x]}, \qquad (5.10)$$

$$P_b = \frac{S}{n[x^4]-[x^2][x^2]}, \qquad (5.11)$$

$$P_c = \frac{S}{[x^2][x^4]-[x^3][x^3]}. \qquad (5.12)$$

Середні квадратичні похибки коефіцієнтів, обчислені з приміненням (4.18) визначаються формулами

$$m_a = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-3}\cdot\frac{n[x'^2]}{n([x'^2][x'^4]-[x'^3][x'^3])-[x'^2][x'^2][x'^2]}} \qquad (5.13)$$

$$m_b = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-3}\cdot\frac{n[x'^4]-[x'^2][x'^2]+4\frac{[x]}{n}(n[x'^2]-[x][x'^2])}{n([x'^2][x'^4]-[x'^3][x'^3])-[x'^2][x'^2][x'^2]}}, \qquad (5.14)$$

$$m_c = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-3}\cdot\frac{Q}{n([x'^2][x'^4]-[x'^3][x'^3])-[x'^2][x'^2][x'^2]}} \qquad (5.15)$$

де

$$Q=[x'^2][x'^4]-[x'^3][x'^3]+\left(\frac{[x]}{n}\right)^2\left(n[x'^4]-[x'^2][x'^2]\right)+$$
$$+2\left(\frac{[x]}{n}\right)^2([x][x'^3]-[x'^2][x'^2])+[x'^2]\frac{[x]}{n}\left(\frac{[x]^3}{n^2}-2[x]\right). \quad (5.16)$$

При рівновідстоячих значеннях аргумента формули середніх квадратичних похибок набувають виду

$$m_a=\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-3}\cdot\frac{180}{\chi^4 n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)}},$$

$$m_b=\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-3}\cdot\frac{12\{60x_1{}^2+60x_1\chi(n-1)+\chi^2(2n-1)(8n-11)}{\chi^4 n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)}},$$

(5.17)

$$m_c=\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-3}\cdot\frac{T}{\chi^4 n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)}}.$$

де

$$T=3\{60x_1{}^4+120x_1\chi(n-1)+12x_1{}^2\chi^2(7n^2-15n+7)+$$
$$+12x_1\chi^3(n-1)(n-2)(2n-1)+ \quad (5.18)$$
$$+\chi^4(n-1)(n-2)(3n^2-3n+2)+12x_1\chi 3(n-1).$$

Ці ж формули застосовують для підрахунку середніх квадратичних похибок коефіцієнтів, виражених через кінцеві різниці (4.40).

При

де

$$m_y^2=\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-3}\quad, \qquad (6.2)$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}\right)^2=\left(\frac{\partial}{\partial y_i}x^2+\frac{\partial b}{\partial y_i}x+\frac{\partial c}{\partial y_i}\right)^2=$$
$$=\left(\frac{\partial a}{\partial y_i}\right)^2x^4+\left(\frac{\partial b}{\partial y_i}\right)^2x^2+\left(\frac{\partial c}{\partial y_i}\right)^2+2\left(\frac{\partial a}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial b}{\partial y_i}\right)x^3+ \quad (6.3)$$
$$+2\left(\frac{\partial b}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial c}{\partial y_i}\right)x^2+2\left(\frac{\partial b}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial c}{\partial y_i}\right)x.$$

Після знаходження сум цієї рівності отримаємо

$$\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]=\left[\left(\frac{\partial a}{\partial y}\right)^2\right]x4+\left[\left(\frac{\partial b}{\partial y}\right)^2\right]x2+\left[\left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)^2\right]+$$
$$+2\left[\frac{\partial a}{\partial y}\cdot\frac{\partial b}{\partial y}\right]x^3+2\left[\frac{\partial a}{\partial y}\cdot\frac{\partial c}{\partial y}\right]x^2+2\left[\frac{\partial b}{\partial y}\cdot\frac{\partial c}{\partial y}\right]x. \quad (6.4)$$

Підставляючи (6.2), (6.3), (6.4) в (6.1), будемо мати

$$m\varphi=\sqrt{m_a^2x^4+m_b^2x^2+m_c^2+2\frac{[EE]}{n-3}\left\{\left[\frac{\partial a}{\partial y}\cdot\frac{\partial b}{\partial y}\right]x^3+\left[\frac{\partial a}{\partial y}\cdot\frac{\partial c}{\partial y}\right]x^2+\left[\frac{\partial b}{\partial y}\cdot\frac{\partial c}{\partial y}\right]x\right\}}$$
(6.5)

Розкриваючи вирази, які стоять у фігурних дужках, після виконання всіх дій, отримаємо

$$m_c = m\sqrt{\frac{1}{P_c}} = \frac{0{,}703}{\sqrt{0{,}0172}} = 5{,}360 .$$

Таким чином, для поліному

$$y = ax^2 + bx + c = -0{,}78308x2 - 4{,}00513x + 25{,}69847$$

середні квадратичні похибки отриманих коефіцієнтів будуть $m_a = 0{,}899$, $m_b = 4{,}464$, $m_c = 5{,}360$.

У програмованому мікрокалькуляторі CITIZEN SRP-350 приведена програма [5x^2], яка повністю реалізує дану проблему (див. практичну роботу №2).

Студенти виконують індивідуальні самостійні роботи по зрівноваженню і оцінці точності спотворених моделей.

Лекція 6. Середня квадратична похибка зрівноваженої функції квадратичного поліному

Середня квадратична похибка зрівноваженої функції підраховується за формулою

$$m_\varphi = \sqrt{m_Y^2\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]} \quad , \qquad (6.1)$$

$$y = ax^2 + bx \quad . \qquad (5.19)$$

формули середніх квадратичних похибок

$$m_a = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-2}\cdot\frac{[x^2]}{[x^4][x^2]-[x^3][x^3]}},$$
$$m_b = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-2}\cdot\frac{[x^4]}{[x^4][x^2]-[x^3][x^3]}}. \qquad (5.20)$$

В тому випадку, коли обчислення коефіцієнтів ведеться за формулами (4.57), середні квадратичні похибки визначаються за формулами

$$m_a = \sqrt{\frac{[\eta\eta]}{n-2}\cdot\frac{n}{n[x^2]-[x][x]}} \quad , \qquad (5.21)$$

$$m_b = \sqrt{\frac{[\eta\eta]}{n-2}\cdot\frac{[x^2]}{n[x^2]-[x][x]}} \quad . \qquad (5.22)$$

Величина η підраховується за формулами (4.54)

Для квадратичної залежності

$$y = ax^2 \qquad (5.23)$$

середня квадратична похибка коефіцієнта дається формулою

$$m_a = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-1}\cdot\frac{1}{[x^4]}} \quad . \qquad (5.24)$$

Якщо значення коефіцієнта а підраховувалось із формули (4.71)

$$a = \frac{[qx]}{[x^2]},$$

то середня квадратична похибка вказаного коефіцієнта

$$m_a = \sqrt{\frac{[\eta\eta]}{n-1} \cdot \frac{1}{[x^2]}} \quad . \qquad (5.25)$$

Практична робота 5

Необхідно виконати оцінку точності визначених коефіцієнтів a, b і c на попередній практичній роботі.

Знайдемо середню квадратичну похибку одиниці ваги

$$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-3}} = \sqrt{\frac{3{,}45993}{7}} = 0{,}703 .$$

Розрахуємо ваги коефіцієнтів

$$S = n([x^2][x^4] - [x^3][x^3]) + [x]([x^2][x^3] - [x][x^4]) + [x^2]([x][x^3] - [x^2][x^2]) =$$
$$= 10(68{,}26 \cdot 533{,}1862 - 188{,}218^2) + 25{,}6(68{,}26 \cdot 188{,}218 - 25{,}6 \cdot 533{,}1862) +$$
$$+ 68{,}26(25{,}6 \cdot 188{,}218 - 68{,}26^2) = 16{,}655688.$$

тобто S = nD + [x]E + [x2]c = Δ - визначнику системи нормальних рівнянь

$$P_a = \frac{S}{n[x^2] - [x][x]} = \frac{16{,}6555688}{10 \cdot 68{,}26 - 25{,}6 \cdot 25{,}6} = \frac{16{,}6555688}{27{,}24} = 0{,}611442291$$

При побудові істинної моделі залежності характеристик пам'яті від ситуативної тривожності нами

по першій схемі Гауса була отримана вага третього коефіцієнта 0,611444, що цілком співпадає з вагою отриманого коефіцієнта a і підтверджує коректність і правильність теоретичних викладок лекції 3.

Вже більше 50 років було відомо, що вага останнього коефіцієнта в схемі Гаусса дорівнює сумі коефіцієнтів при цьому невідомому, а вага передостаннього невідомого розраховувалася шляхом деяких маніпуляцій з коефіцієнтами

Вага коефіцієнта «в» розраховується за формулою

$$P_b = \frac{S}{n[x^4] - [x^2][x^2]} = \frac{S}{F} .$$

Вага коефіцієнта C

$$P_c = \frac{S}{n[x^4][x^2] - [x^3][x^3]} = \frac{S}{D} .$$

Середні квадратичні похибки зрівноважених коефіцієнтів будуть

$$m_a = m\sqrt{\frac{1}{P_a}} = 0{,}703\sqrt{\frac{1}{0{,}611}} = 0{,}899 ,$$

$$m_b = m\sqrt{\frac{1}{P_b}} = \frac{0{,}703}{\sqrt{0{,}0248}} = 4{,}464 ,$$

$$b = -\frac{B}{\lg e}. \qquad (8.49)$$

Між перетвореною і вихідною функцією існує залежність

$$f(x) = \lg \varphi(x). \qquad (8.50)$$

Звідки отримаємо

$$m_f = \frac{\varphi(x)}{M} m_\varphi \quad , \qquad (8.51)$$

де М = 0,4343 – модуль переходу від натуральних логарифмів до десяткових.

Тоді

$$m_\varphi = \frac{1}{24(x)} \sqrt{m_B^2 x^2 + m_A^2 - 2\frac{[\eta\eta]}{n-2} \cdot \frac{[x]}{n[x^2]-[x][x]} x} \qquad (8.52)$$

і

$$m_f = \frac{\varphi(x)}{M} \sqrt{m_B^2 x^2 + m_A^2 - 2\frac{[\eta\eta]}{n-2} \cdot \frac{[x]}{n[x^2]-[x][x]} x} \quad , \qquad (8.53)$$

де m_B і m_A розраховуються за (8.47), (8.48)

4	2,3	12	–2642,48	0,055	0,234
5	2,5	11	–3116,12	0,050	0,224
6	2,8	9	–3956,32	0,0122	0,110
7	2,9	8	–4274,22	0,0028	0,053
8	3	7	–4612,39	0,0063	0,079
9	3,1	6	–4971,62	0,0309	0,176
10	3,3	3	–5756,54	0,1941	0,440
n=10	25,6	101			

Підготовимо до обчислень параметр Е.

На основі даних табл. 4.1

$$E = (25{,}6 \cdot 68{,}26 - 10 \cdot 188{,}218)x^3 + (25{,}6 \cdot 188{,}218 - 68{,}26^2)x^2 +$$
$$+ (68{,}26 \cdot 188{,}218 + 25{,}6 \cdot 533{,}1862) \cdot x =$$
$$= -134{,}724x^3 + 158{,}9532x^2 - 801{,}80604x.$$

На попередньому занятті було встановлено

$$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-3}} = 0{,}703.$$

Тобто,

$$\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-3} = 0{,}703^2 = 0{,}494,$$

$$m_\varphi = \sqrt{0{,}808x^4 + 19{,}927x^2 + 28{,}730 + 2 \cdot 0{,}494 \frac{E}{16{,}656}}.$$

або

$$m_{\varphi} = \sqrt{0{,}808x^4 + 19{,}927x^2 + 28{,}730 + 0{,}0593E}.$$

Таблиця 6.2. Допоміжна розрахункова таблиця

№	x	**0.808** x^4	**19.927x²**		0.0593E
1	1,6	=5,295	+51,013	+28,73	+0,0593(-1427,798976)
2	2	=12,928	+79,708	+28,73	+0,0593(-2045,59)
3	2,1	=15,714	+87,878	+28,73	+0,0593(-2230,49)
4	2,3	=22,611	+105,413	+28,73	+0,0593(-2642,48)
5	2,5	=31,562	+124,544	+28,73	– 0,0593*3116,12
6	2,8	=49,664	+156,228	+28,73	– 0,0593*3956,32
7	2,9	=27,148	+167,586	+28,73	– 0,0593*4274,22
8	3	=65,448	+179,343	+28,73	– 0,0593*4612,39
9	3,1	=74,620	+191,49	+28,73	–

Логарифмуючи (8.42), отримаємо

$$\lg y = \lg a - bx \lg e . \tag{8.43}$$

Приймаючи $\lg y = Y; \lg a = A; -b\lg e = B,$, переходимо до рівняння прямолінійної залежності

$$Y = A + BX , \tag{8.44}$$

рішення якого виконується за допомогою описаних раніше формул.

Коефіцієнти цього рівняння визначаються за допомогою формул

$$A = \frac{n[xY] - [x][Y]}{n[x^2] - [x][x]} , \tag{8.45}$$

$$B = \frac{[x^2][Y] - [x][Y]}{n[x^2] - [x][x]} . \tag{8.46}$$

Середні квадратичні похибки коефіцієнтів

$$m_A = \sqrt{\frac{[\eta\eta]}{n-2} \cdot \frac{n}{n[t^2] - [t][t]}} , \tag{8.47}$$

$$m_B = \sqrt{\frac{[\eta\eta]}{n-2} \cdot \frac{[t^2]}{n[t^2] - [t][t]}} . \tag{8.48}$$

Формула (8.43) є робочою, тому що за її допомогою досить легко виконуються всі обчислювальні роботи.

Перехід до вихідного рівняння виконується шляхом потенціювання величин Y і A.

Коефіцієнт b знаходиться за формулою

Середня квадратична похибка функції f(x)

$$m_f = \sqrt{m_a^2 x^2 + m_b^2 T - 2\frac{[\eta\eta]}{n-2}\cdot\frac{[x]}{n[x^2]-[x][x]}x} \quad . \qquad (8.37)$$

Але

$$4m_{y^2}^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\varphi^2(x) = m_y^2\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2, \qquad (8.38)$$

або

$$4m_\varphi^2\varphi^2(x) = m_f^2 . \qquad (8.39)$$

Звідки

$$m_\varphi = \frac{1}{24(x)}m_f . \qquad (8.40)$$

Середня квадратична похибка зрівноваженої функції φ(x)

$$m_\varphi = \frac{1}{24(x)}\sqrt{m_a^2 x^2 + m_b^2 - 2\frac{[\eta\eta]}{n-2}\cdot\frac{[x]}{n[x^2]-[x][x]}x} \quad . \qquad (8.41)$$

8.3. Побудова математичної моделі показниковою функцією

Розглянемо функцію

$$y = ae^{-bx} \quad . \qquad (8.42)$$

			8		0,0593*4971,62
10	3,3	=95,822	+217,005	+28,73	–0,0593*5756,54

№	x	m_φ^2	m_φ
1	1,6	0,37	0,608
2	2	0,063	0,251
3	2,1	0,054	0,232
4	2,3	0,055	0,234
5	2,5	0,050	0,224
6	2,8	0,0122	0,110
7	2,9	0,0028	0,053
8	3	0,0063	0,079
9	3,1	0,0309	0,176
10	3,3	0,1941	0,440

Модуль 2: Практичні роботи №№ 4, 5, 6.

Лекція 7. Побудова математичної моделі результатів психолого-педагогічного експерименту гіперболічною функцією

7.1. Побудова математичної моделі

У психології і педагогіці зустрічається ряд видів гіперболічної залежності між різними факторами. Основними являються

$$y = \frac{ax + b}{x} = a + b\frac{1}{x} \quad , \tag{7.1}$$

$$y = \frac{a}{x^2} = a\frac{1}{x^2} \quad , \tag{7.2}$$

$$y = \frac{a}{x} = a\frac{1}{x} \quad . \tag{7.3}$$

Рівняння (7.1) перетворимо до прямолінійного виду, якщо представимо

$$\frac{1}{x} = T \quad . \tag{7.4}$$

Тоді

$$y = bT + a \quad . \tag{7.5}$$

Спочатку підраховують по визначеним факторам x_i величини $T_i = \frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, ..., \frac{1}{x_n}$. Після розраховують величини

$$y = \sqrt{ax + b} \quad , \tag{8.30}$$

яку представимо у вигляді

$$y^2 = ax + b, \tag{8.31}$$

підвівши обидві частини рівняння до квадрату.

Приймаючи y^2 = Y, отримаємо прямолінійну залежність між y^2 і x

$$Y = ax + b \quad . \tag{8.32}$$

Рішення цього рівняння виконується по формулам, приведеним вище.

В загальному випадку

$$\varphi^2(x) = f(x) \quad . \tag{8.32}$$

Середні квадратичні похибки коефіцієнтів розраховуються за допомогою формул

$$m_a = \sqrt{\frac{[\eta\eta]}{n-2} \cdot \frac{n}{n[x^2] - [x][x]}} \quad , \tag{8.33}$$

$$m_b = \sqrt{\frac{[\eta\eta]}{n-2} \cdot \frac{[x^2]}{n[x^2] - [x][x]}} \quad , \tag{8.34}$$

де самі коефіцієнти розраховуються за формулами

$$a = \frac{n[xY] - [x][Y]}{n[x^2] - [x][]x} \quad , \tag{8.35}$$

$$b = \frac{[x^2][Y] - [x][xY]}{n[x^2] - [x][]x} \quad . \tag{8.36}$$

$$m_f^2 = m_{\lg y}^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \lg y} \right)^2 \quad , \qquad (8.25)$$

$$m_{\lg y}^2 = m_y^2 \left(\frac{M}{\varphi(x)} \right)^2 \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 = m_\varphi^2 \left(\frac{M}{\varphi(x)} \right)^2 , \qquad (8.26)$$

де M = 0,4343 – модуль переходу від натуральних логарифмів до десяткових.

Звідси

$$m_f^2 = \left(\frac{\varphi(x)}{M} \right) m_\varphi^2 . \qquad (8.27)$$

Таким чином, можемо написати формули середніх квадратичних похибок зрівноваженої функції φ(x)

Для залежності $y = a\sqrt[m]{x}$

$$m_f = \frac{\varphi_x}{M} \cdot \sqrt{m_A^2 (\lg x)^2 + m_b^2 - 2\frac{[\eta\eta]}{n-2} \cdot \frac{[\lg x]}{n[(\lg x)^2] - [\lg x][\lg x]} \lg x} . \qquad (8.28)$$

Для залежності $y = a\sqrt{x}$

$$m_f = \frac{\varphi(x)}{M} m_a \quad . \qquad (8.29)$$

8.2. Побудова математичної моделі ірраціональною функцією

Розглянемо функцію

T_i, y_iT_i, знаходять суми всіх результатів експериментальних даних і визначають суми [T], [T^2], [y] і [yT].

Шукані коефіцієнти знаходять за формулою

$$b = \frac{n[yT] - [T][y]}{n[T^2] - [T][T]} \quad , \qquad (7.6)$$

$$a = \frac{[T^2][y] - [yT][T]}{n[T^2] - [T][T]} . \qquad (7.7)$$

Коефіцієнт a можна розрахувати також за допомогою формули

$$a = \frac{[y]}{n} - b\frac{[T]}{n} . \qquad (7.8)$$

На експериментальній кривій лежать дві точки

$$\left(\frac{T}{n} ; \frac{[y]}{n} \right), \left(\frac{[T^2]}{[T]} ; \frac{[yT]}{T} \right) . \qquad (7.9)$$

Контрольна формула має вигляд

$$[y^2] - b[yT] - a[y] = [\varepsilon\varepsilon] . \qquad (7.10)$$

Рівняння (7.2) і (7.3) приводять до прямолінійного вигляду заа допомогою підстановок

$$\frac{1}{x^2} = x' , \qquad (7.11)$$

$$\frac{1}{x} = T \quad . \qquad (7.12)$$

Тоді

$$y = ax', \qquad (7.13)$$

$$y = aT. \qquad (7.14)$$

Рішення цих рівнянь виконують за формулами (1.56) – (1.63).

7.2. Оцінка точності зрівноважених елементів

Середні квадратичні похибки коефіцієнтів для прямолійної залежності, в яких суми [x] замінюються сумами $\left[\frac{1}{x}\right]$ або $\left[\frac{1}{x^2}\right]$, а суми $[[\varepsilon\varepsilon]]$ - сумами [ηη].

Середні квадратичні похибки коефіцієнтів розраховують за формулами

$$m_a = \sqrt{\frac{[\eta\eta]}{n-2} \cdot \frac{[T^2]}{n[T^2]-[T][T]}}, \qquad (7.15)$$

$$m_b = \sqrt{\frac{[\eta\eta]}{n-2} \cdot \frac{n}{n[T^2]-[T][T]}}. \qquad (7.16)$$

Середня квадратична похибка зрівноваженої функції знаходиться за формулою

$$m_\varphi = \sqrt{m_a^2 + m_b^2 T^2 - 2\frac{[\eta\eta]}{n-2} \cdot \frac{[T]}{n[T^2]-[T][T]} T}, \qquad (7.17)$$

$$m_A = \sqrt{\frac{[\eta\eta]}{n-2} \cdot \frac{[[\lg x]^2]}{n[(\lg x)^2]-[\lg x][\lg x]}}. \qquad (8.20)$$

Залежність виду

$$y = a\sqrt{x}$$

розрішається формулою

$$A = \lg a = \frac{[\lg y] - \frac{1}{2}[\lg x]}{n}. \qquad (8.21)$$

Формула середньої квадратичної похибки коефіцієнта A = lg*a* буде мати вигляд

$$m_A = \sqrt{\frac{[\eta\eta]}{n-1} \cdot \frac{1}{n}}. \qquad (8.22)$$

В обох випадках

$$\eta = f(\lg x) - \lg y, \qquad (8.23)$$

де f(lg*x*) є зрівноважене значення логарифма y, що відповідає логарифму спостережених значень x.

Після приведення формул до прямолінійного виду шляхом логарифмування, будемо мати

$$f(\lg x) = \lg \varphi(x). \qquad (8.24)$$

Знайдемо середні квадратичні похибки зрівноважених функцій лівої і правої частин по приведеним вище правилам

Перейдемо до залежності (8.2).

Логарифмуванням вона приводиться до виду

$$\lg y = \lg a + \frac{1}{2}\lg x \quad . \tag{8.13}$$

Ми маємо одне невідоме lg$a$, яке позначимо через А. Визначення числового значення А виконується за допомогою формули

$$A = \frac{[\lg y] - \frac{1}{2}[\lg x]}{n} \quad . \tag{8.14}$$

Для контролю використовуються формули

$$[(\lg y)^2] - A[\lg y] = [\eta\eta] \quad , \tag{8.15}$$

$$[\{y(\exp\eta_i - 1)\}^2] = [\varepsilon\varepsilon] \quad . \tag{8.16}$$

При цьому

$$\eta_i = f(\frac{1}{2}\lg x) - \lg y_i \quad , \tag{8.17}$$

exp η_i – результат потенціювання η_i

$$\varepsilon_i = \varphi(x_i) - y_i \quad . \tag{8.18}$$

Середні квадратичні похибки розраховуються за формулами

$$m_b = \sqrt{\frac{[\eta\eta]}{n-2} \cdot \frac{n}{n[(\lg x)^2] - [\lg x][\lg x]}} \ , \tag{8.19}$$

або

$$m_\varphi = \sqrt{m_b^2\left(T - \frac{[T]}{n}\right)^2 + m_{\frac{[y]}{n}}^2} \ . \tag{7.18}$$

Для залежності

$$y = a\frac{1}{x = aT} \tag{7.19}$$

значення коефіцієнта а визначається за формулою

$$a = \frac{[Ty]}{[T^2]}. \tag{7.20}$$

Середня квадратична похибка при цьому буде

$$m_a = \sqrt{\frac{[\eta\eta]}{n-1} \cdot \frac{1}{[T^2]}}. \tag{7.21}$$

Середня квадратична похибка зрівноваженої функції

$$m_\varphi = \sqrt{\frac{[\eta\eta]}{n-1} \cdot \frac{T^2}{[T^2]}} = m_a T \ . \tag{7.22}$$

Накінець, для випадку

$$y = a\frac{1}{x^2} = a \cdot x', \tag{7.23}$$

середні квадратичні похибки підраховуються за допомогою формул (7.21), (7.22), в яких Т замінюється через х`.

В заключення приведемо формулу розрахунку коефіцієнта кореляції для нашого випадку

$$r^2 = \frac{(n[yT] - [y][T]^2)}{(n[T^2] - [T][T])(n[y^2] - [y]^2)} \quad . \qquad (7.24)$$

Практична робота 7

Побудуємо математичну модель залежності ситуативної тривожності від характеристик пам'яті за даними, приведеними в табл. 1.3 гіперболічною функцією $y = a + \frac{b}{x}$ і дамо оцінку точності зрівноваженим елементам.

Таблиця 7.1

Обчислювальна таблиця для побудови математичної моделі гіперболічного виду

№	x	y	$x_i y_i$	T=1/x	T^2	Ty	y^2
1	1,6	18	28,8	0,625	0,3906	11,25	324
2	2	14	28	0,5	0,25	7	196
3	2,1	13	27,3	0,4762	0,2268	6,1906	169
4	2,3	12	27,6	0,4348	0,1890	5,2176	144
5	2,5	11	27,5	0,4	0,16	4,4	121

$$F(x) = a^i\sqrt{X} \quad . \qquad (8.3)$$

Після логарифмування (8.1), отримаємо

$$\lg y = \lg a + \frac{1}{m}\lg x \, . \qquad (8.4)$$

Приймаючи

$$\lg y = Y, \lg a = A, \frac{1}{m} = b, \lg x = X \, , \qquad (8.5)$$

отримаємо

$$Y = A + bX \quad . \qquad (8.6)$$

Рішення цього рівняння виконується за формулами прямолінійної залежності

$$b = \frac{1}{m} = \frac{n[\lg x \lg y] - [\lg x][\lg y]}{n[(\lg x)^2] - [\lg x][\lg x]} \quad , \qquad (8.7)$$

$$A = \lg a = \frac{[(\lg x)^2][\lg y] - [\lg x \lg y][\lg x]}{n[(\lg x)^2] - [\lg x][\lg x]} \, . \qquad (8.8)$$

Контроль виконується за формулами

$$[(\lg y)^2] - b[\lg x \lg y] - A[\lg y] = [\eta\eta] \, , \qquad (8.9)$$

$$[\{y \exp \eta - 1\}^2] = [EE] \, . \qquad (8.10)$$

При цьому

$$\eta_i = f(\lg x_i) - \lg y_i \, , \qquad (8.11)$$

$\exp\eta_i$ -результат потенціювання η_i;

$$\varepsilon_i = \varphi(x_i) - y_i . . \qquad (8.12)$$

$$m_{\varphi} = \sqrt{17{,}00997(T - 0{,}40968)^2 + 0{,}15551}\,.$$

Розрахунки по цій формулі приводяться в останньому стовпчику табл. 7.1.

Для проведення досліджень при апроксимації гіперболічною функцією повністю підходить програма [4inV] програмованого мікрокалькулятора CITIZEN SRP-350.

Лекція 8. Побудова математичних моделей степеневою, ірраціональною і показниковою функціями

8.1. Побудова математичної моделі степеневою функцією

Розглянемо математичну модель виду

$$y = a\sqrt[m]{x} \qquad (8.1)$$

і

$$y = a\sqrt{x}\,. \qquad (8.2)$$

Невідомими величинами являються a і m.

Ці формули являються частковими випадками залежності загального виду

6	2,8	9	25,2	0,3571	0,1275	3,2139	81
7	2,9	8	23,2	0,3448	0,1189	2,7584	64
8	3	7	21	0,3333	0,1111	2,3331	49
9	3,1	6	18,6	0,3226	0,1041	1,9356	36
10	3,3	3	9,9	0,3030	0,0918	0,909	9
n=10	25,6	101	237,1	4,0968	1,7698	45,2082	1193

y`	**n=y`-y**	**nr**	**m_{φ}**
19,120	1,12	1,2544	0,972
13,883	–0,117	0,01369	0,542
12,886	–0,114	0,01300	0,480
11,152	–0,848	0,71910	0,408
9,694	–1,306	1,70564	0,396
7,897	–1,103	1,21661	0,450
7,382	–0,618	0,38192	0,476
6,900	–0,1	0,01	0,505
6,452	0,452	0,20430	0,533
5,631	2,631	6,92276	0,591
	–0,003	12,44082	

Розрахуємо окремі компоненти робочих формул

$D=[T][y]-[yT][T]=1{,}7698\cdot 101-45{,}2082-4{,}0968=-6{,}45915376,$

$A=n[Ty]-[y][T]=10\cdot 45{,}2082-101\cdot 4{,}0968=38{,}3052,$

$B=n[T^2]-[T][T]=10\cdot 1{,}7698-4{,}0968\cdot 4{,}0968=0{,}91422976,$

$C=n[y^2]-[y]^2=10\cdot 1193-101\cdot 101=1729.$

Коефіцієнт кореляції при цьому

$$r^2=\frac{A^2}{BC}=\frac{(38{,}3052)^2}{0{,}91422976\cdot 1729}=\frac{1467{,}288347}{1580{,}703255}=0{,}92825,$$

$$r=\sqrt{r^2}=\sqrt{0.92825}=0.96345.$$

Тоді

$$a=\frac{D}{B}=\frac{-6{,}45915}{0{,}91423}=-7{,}06512,$$

$$b=\frac{A}{B}=\frac{38{,}3052}{0{,}91423}=41{,}8988.$$

Таким чином, нами отримана формула

$$y'=41{,}8988T-7{,}06512, \qquad (7.25)$$

або

$$y'=41{,}8988\frac{1}{x}-7{,}06512. \qquad (7.26)$$

При розрахунку по програмі [0 lin] (див. практичну роботу №1) отримані слідуючі значення:

a = -7,06164403, b = 41,89036328,

r = 0,96335961.

Підставляючи у формулу (7.25) значення Т, отримаємо зрівноважені значення у\`, які приводяться в табл. 7.1. Вичисляємо відхилення ε = у\` – у, підносимо до квадрату ці значення і розраховуємо середню квадратичну похибку одиниці ваги і середні квадратичні похибки зрівноважених елементів

$$m_a=\sqrt{\frac{[\eta\eta]}{n-2}\cdot\frac{[T^2]}{n[T^2]-[T][T]}}=\sqrt{\frac{[\eta\eta]}{n-2}\cdot\frac{[T^2]}{B}}=\sqrt{\frac{12{,}44282}{8}\cdot\frac{1{,}7698}{0{,}91423}}=1{,}73506$$

$$m_b=\sqrt{\frac{[\eta\eta]}{n-2}\cdot\frac{n}{n[T^2]-[T][T]}}=\sqrt{\frac{12{,}44082}{8}\cdot\frac{10}{0{,}91423}}=\sqrt{17{,}00997}=4{,}12431$$

Контроль зрівноваження:

$[y]^2-b[yT]-a[y]=1193-41{,}8988\cdot 45{,}2082-$
$(-7{,}06512)\cdot 101=12{,}40778$

Таким чином, отримали 12,40778-12,44082=-0,03304, що можна вважати цілком задовільним виконанням процедури строгого зрівноваження, тобто в обчисленнях помилки немає. Середня квадратична похибка зрівноваженої функції

$$m_\varphi=\sqrt{m_b^2\left(T-\frac{[T]}{n}\right)^2+m^2_{\frac{[y]}{n}}};$$

$$m^2_{\frac{[y]}{n}}=\frac{[\eta\eta]}{n(n-2)}=0{,}15551;$$

Літнарович Руслан Миколайович,
доцент, кандидат технічних наук

ЗАСТОСУВАННЯ СПОСОБУ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ ДО ОБРОБКИ МАТЕРІАЛІВ ПСИХОЛОГІЧНИХ І ПЕДАГОГІЧНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

Частина 2

КУРС ЛЕКЦІЙ

Навчальне видання

Комп'ютерний набір , верстка, дизайн у редакторі Microsoft ®Office®Word :
Кузьменчук Надія Юріївна,
Котович Наталія Василівна,
Ящук Ольга Олексіївна

МІЖНАРОДНИЙ ЕКОНОМІКО-ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ.АКАД.С.ДЕМ'ЯНЧУКА
Кафедра математичного моделювання

33027, м. Рівне, вул. акад.С.Дем'янчука ,4

Практична робота 8

8.1. Побудувати математичну модель степеневою функцією $y = ax^b$ і дати оцінку точності зрівноваженої моделі.

Таблиця 8.1.

Обчислювальна таблиця для побудови математичної моделі степеневою функцією.

№	№	x	y	exp η	lg x	lg y	lg x lg y
1	1	1,6	18	1.1231	0.2041	1.2553	0.2562
2	2	2	14	1.0165	0.3010	1.1461	0.3450
3	3	2,1	13	-1.0067	0.3222	1.1139	0.3589
4	4	2,3	12	-1.1140	0.3617	1.0792	0.3903
5	5	2,5	11	-1.2056	0.3979	1.0414	0.4144
6	6	2,8	9	-1.2362	0.4472	0.9542	0.4267
7	7	2,9	8	-1.1784	0.4624	0.9031	0.4176
8	8	3	7	-1.1031	0.4771	0.8451	0.4032
9	9	3,1	6	-1.0095	0.4914	0.7782	0.3824
10	10	3,3	3	1.7575	0.5185	0.4771	0.2474
n=10	n=10	25,6	101	101	3.9835	9.5936	3.6421

№	$(\lg x)^2$	$(\lg y)^2$	y'	ή	ε=y'-y	ε²
1	0.0417	1.5757	22.196	0.091	4.196	17.6064
2	0.0906	1.3136	14.231	0.0071	0.231	0.0534
3	0.1038	1.2409	12.913	-0.0029	-0.087	0.0076
4	0.1308	1.1646	10.773	-0.0469	-1.227	1.5055
5	0.1584	1.0845	9.124	-0.0812	-1.876	3.5194
6	0.1999	0.9106	7.280	-0.0921	-1072	2.9584
7	0.2138	0.8156	6.789	-0.0713	-1.211	1.4665
8	0.2276	0.7142	6.346	-0.0426	-0.654	0.4277
9	0.2414	0.6055	5.944	-0.0049	-0.056	0.0031
10	0.2688	0.2276	5.248	0.2449	2.248	5.0535
n=10	1.6768	9.6528		0.0019	-0.156	32.6015

№	ήή	y(expή-1)	(y(expή-1))²	φ(x)=lgy'
1	0.00828	4.1958	17.6047	1.3463
2	0.00005	0.2310	0.0534	1.1532
3	0.00001	-0.0871	0.0076	1.1110
4	0.00220	-1.36680	1.8714	1.0323
5	0.00659	-2.2646	5.1148	0.9602
6	0.00848	-2.1258	4.5190	0.8621

7	0.00508	-1.4272	2.0369	0.8318
8	0.00181	-0.7217	0.5208	0.8025
9	0.00002	-0.0570	0.050.0032	0.7741
10	0.05997	2.4998	6.2490	0.7200
n=10	0.09249		37.9808	

Розрахуємо коефіцієнт кореляції за формулою

$$r=\frac{n[\lg x\lg y]-[\lg x][\lg y]}{\sqrt{(n[(\lg x)^2]-[\lg x][\lg x])(n[(\lg y)^2]-([\lg y])^2)}}.$$

Введемо позначення

$$F=n[\lg x\lg y]-[\lg x][\lg y]=10\cdot 3{,}6421-3{,}6835\cdot 9{,}5936=-1{,}7951,$$
$$B=n[(\lg x)^2]-[\lg x][\lg x]=10\cdot 1{,}6768-3{,}9835=0{,}89973,$$
$$C=n[(\lg y)^2]-([\lg y])^2=10\cdot 9{,}6528-9{,}5936^2=4{,}4908.$$

І в нашому випадку

$$r=\frac{F}{\sqrt{BC}}=\frac{-1{,}79510}{\sqrt{0{,}89973\cdot 4{,}4908}}=-0{,}89304,$$

що говорить про високий зв'язок між факторними і результуючими ознаками і дає нам можливість реалізувати цей зв'язок у вигляді емпіричної формули. При цьому коефіцієнти будуть

$$b=\frac{1}{m}=\frac{F}{B}=\frac{-1{,}79510}{0{,}89973}=-1{,}99515,$$

$$A = \lg a = \frac{[(\lg x)^2][\lg y] - [\lg x \lg y][\lg x]}{B} = \frac{D}{B} =$$
$$= \frac{1{,}6768 \cdot 9{,}5936 - 3{,}6421 \cdot 3{,}983}{0{,}89973} = 1{,}754129$$

Звідки a = 56,77132.

Провівши розрахунки по програмі мікрокалькулятора CITIZEN SRP-350 [3PWr. Маємо: a = 56,60540762; b = -1,991911388; r = -0,892295977.

При цьому слід замітити, що розрахунки по програмі виконуються з точністю до 12 знаків і, звичайно, результати ручного розрахунку не можуть конкурувати з результатами розрахунку по програмі. Але для практичних розрахунків нами отримана формула

$$y = 56{,}77132x^{-1{,}99515}$$

Для теоретичних розрахунків слід використовувати формулу

$$y = 56{,}60540762x^{-1{,}991911388}$$

Контроль зрівноваження

$$[(\lg y)^2] - b[\lg x \lg y] - \lg a[\lg y] =$$
$$= 9{,}6528 + 1{,}9919 \cdot 3{,}6421 - 1{,}75285 \cdot 9{,}5936 = 0{,}091357,$$

$$[\eta\eta] = 0{,}09249,$$

5.Літнарович Р.М. Основи математики.Дослідження впливу ситуативної тривожності на характеристики пам'яті.Навчальний посібник для студентів педагогічного факультету.Частина 2.МЕГУ,Рівне,2006,-27с.
6.Літнарович Р.М.Основи математики.Дослідження результатів психологічного експерименту логарифмічною функцією.Частина 3.МЕГУ, Рівне,2006,-19с.
7.Літнарович Р.М.Основи математики.Дослідження результатів психолого-педагогічного експерименту експоненціальною функцією. Частина 4.МЕГУ,Рівне,2006,-17с.
8.Літнарович Р.М.Основи математики.Дослідження результатів психолого-педагогічного експерименту степеневою функцією.Частина 5.МЕГУ,Рівне,2006,-17с.
9.Літнарович Р.М.Основи математики.Дослідження результатів психолого- педагогічного експерименту гіперболічною функцією. Частина 6.МЕГУ,Рівне,2006,18с.
10.Літнарович Р.М.Основи математики.Дослідження результатів психолого-педагогічного експерименту поліноміальною функцією.Частина 7.МЕГУ,Рівне,2006,-20с.
11.Літнарович Р.М.Основи математики.Дослідження результатів психологічного експерименту дробово-лінійною функцією.Частина 8.МЕГУ,Рівне,2006,-23с.
12.Літнарович Р.М.Основи математики.Дослідження результатів психологічного експерименту інвертованою залежністю гіперболічного типу.Частина 9.МЕГУ,Рівне,2006,-21с.
13.Літнарович Р.М. Дослідження точності апроксимації результатів психолого – педагогічного експерименту методом статистичних випробувань Монте Карло. Частина 1. Побудова істинної моделі. МЕГУ, Рівне, 2006, -46 с.
14.Літнарович Р. М. Лінійна алгебра. Елементи теорії визначників. Курс лекцій. МЕГУ, Рівне, 2006, – 72с.
15.Літнарович Р. М. Алгебра матриць.Курс лекцій. МЕГУ, Рівне, 2007,-112 с.
16.Максименко С.Д.,Е.Л.Носенко.Експериментальна психологія (дидактичний тезаурус).Навчальний посібник .-К.:МАУП,2004,-128с.

Покажчик понять, термінів та визначень

			$a_0 = \ln A$; $a_1 = k$
2	$y = Bx^b$	$z = a_0+a_1u$	$z = \lg y$; $u = \lg x$
3	$y = a_0+\dfrac{a_1}{x}$	$y = a_0+a_1u$	$u = \dfrac{1}{x}$
4	$y = a_0+\dfrac{a_1}{x^b}$	$y = a_0+a_1u$	$u = \dfrac{1}{x^b}$
5	$y = Ae^{-\frac{(x-a)^2}{2\delta^2}}$	$z = a_0+a_1x+a_2x^2$	$z = \ln y$; $a_0 = \ln A-\dfrac{\lg e}{2\delta^2}$ $a_1 = a \lg e/\delta^2$; $a_2 = -(\lg e/2\delta^2)$
6	$y = a_0 + \dfrac{a_1}{x} + \dfrac{a_2}{x^2} + \ldots$	$y = a_0+a_1u+a_2u^2$	$u = \dfrac{1}{x}$
7	$y = a_0 + a_1x^b + a_2x^{2b} + \ldots$	$y = a_0+a_1u+a_2u^2+\ldots$	$u = x^b$
8	$y = a_0x^{-m} + a_1x^n$	$z = a_0+a_1u$	$z = y^{xm}$; $u = x^{m+n}$

Література

1.Математика:Підручник/О.М.Афанасьєва,Я.С.Бродський,О.Л. Павлов, А.К.Сліпенко. – 2-ге видання, стер. – К.: Вища школа, 2002, - 447 с.

2.Соколенко О.І.Вища математика.Підручник.– К.:Академія,2003,432 с.

3.Козира М.В. Еелементарна та вища математика: Довідник для учнів, вступників до вузів, студентів. – Тернопіль: СМП „Астон”,2004,- 100 с.

4.Літнарович Р.М. Основи математики. Функції і графіки. Навч.посібн. Ч.1. МЕГУ, Рівне, 2006. – 15 с.

$[\{y(\exp\eta - 1)]^2 = 37{,}9808,$

$[\varepsilon\varepsilon] = 32{,}6015,$,

$[\{y(\exp\eta - 1)]2 \approx [\varepsilon\varepsilon].$

що говорить про те, що задача вирішена правильно.

Середні квадратичні похибки коефіцієнтів

$$m_b = \sqrt{\frac{[\eta\eta]}{n-2}\cdot\frac{n}{B}} = \sqrt{\frac{0{,}09249}{8}\cdot\frac{10}{0{,}89973}} = \sqrt{0{,}01156\cdot 11{,}1144} = 0{,}3584$$

$$m_A = m_{\lg a} = \sqrt{\frac{[\eta\eta]}{n-2}\cdot\frac{[(\lg x)^2]}{B}} = \sqrt{0{,}01156\cdot\frac{1{,}6768}{0{,}89973}} = \sqrt{0{,}02154} = 0{,}1468$$

Середня квадратична похибка функції

$$m_f = \frac{\varphi_x^{-y'}}{M}\sqrt{m_A^2(\lg x)^2 + m_b^2 - 2\frac{[\eta\eta]}{n-2}\cdot\frac{[\lg x]}{B}\lg x},$$

або

$$m_f = \frac{\varphi_x}{0{,}4343}\sqrt{0{,}03612(\lg x)^2 + 0{,}1284 - \frac{3{,}9835}{0{,}89973}\lg x}.$$

Тобто

$$m_f = \frac{\varphi_x}{0{,}4343}\sqrt{0{,}03612(\lg x)^2 + 0{,}1284 - 0{,}10236\lg x}.$$

Розрахунок за цією формулою приведений в табл. 8.1.

Таблиця 8.1

	$\varphi(x)=\lg y'$			$(\lg x)^2$			$\lg x$	m_f
m_{f1}	1,3463			0,0417			0,2041	1,349
m_{f2}	1,1532			0,0906			0,3010	0,843
m_{f3}	1,1110			0,1038			0,3222	0,806
m_{f4}	1,0323			0,1308			0,3617	0,737
m_{f5}	0,9602			0,1584			0,3979	0,676
m_{f6}	0,8621			0,1999			0,4472	0,595
m_{f7}	0,8318			0,2138			0,4624	0,571
m_{f8}	0,8025			0,2276			0,4771	0,547
m_{f9}	0,7741			0,2414			0, 4914	0,525
m_{f10}	0,7200			0,2688			0,5185	0,483

Модуль 3: Практичні роботи №№ 7, 8.

Додатки

Додаток 1

Програми для побудови математичних моделей з контролем зрівноваження і оцінкою точності результатів на програмованому калькуляторі SCIENTIFIC CALCULATOR CITIZEN SRP-350

№	**Код програми**	**Назва програми**	**Функція**
1	Lin	Linear regression	$y = a+bx$
2	Log	Logarithmic regression	$y = a+b \ln x$
3	e^	Exponential regression	$y = ae^{bx}$
4	Pwr	Power regression	$y = ax^b$
5	Inv	Inverse regression	$y = a+\frac{b}{x}$
6	x^2	Quadratic regression	$y = a+bx+cx^2$

Додаток 2

Побудова математичних моделей шляхом заміни перемінних

№	Початкова функція	До якого виду приводиться	Заміна змінних
1	$y = Ae^{kx}$	$z = a_0+a_1X$	$z = \ln y;$